Тема 14. Тригонометрия

Часть 2

Содержание

109. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ УГЛОВ.

К Вашему глубочайшему сожалению, ВСЕ ФОРМУЛЫ данного и последующих разделов Вам придётся ВЫУЧИТЬ НАИЗУСТЬ. Причём как СПРАВА НАЛЕВО, так и СЛЕВА НАПРАВО.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta},\quad \mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta},\quad \mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}$$

ПРИМЕР 1. Вычислить $\cos 75^o$.

Так как $75^o = 45^o + 30^o$, то в соответствии с формулой $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ находим:

$$\cos 75^o=\cos(45^o+30^o)=\cos 45^o\cos 30^o-\sin 45^o\sin 30^o=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

Обратите внимание, что мы всегда будем стараться заменить данный нам угол суммой или разностью таких углов, для которых известны величины тригонометрических функций.

ПРИМЕР 2. Вычислить $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Поскольку $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, то на основании формулы $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ получаем:

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

ПРИМЕР 3. Вычислить $\sin 15^o$.

Так как $15^o = 60^o - 45^o$, то в соответствии с формулой $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

находим: $\sin 15^o=\sin(60^o-45^o)=\sin 60^o\cos 45^o-\cos 60^o\sin 45^o=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right).$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

ПРИМЕР 4. Вычислить $\mathrm{tg}15^o$.

Принимая во внимание равенство $15^o = 60^o - 45^o$ и формулу $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$,

получаем: $\mathrm{tg}15^o=\mathrm{tg}(60^o-45^o)=\frac{\mathrm{tg}60^o-\mathrm{tg}45^o}{1+\mathrm{tg}60^o\,\mathrm{tg}45^o}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$

Осталось избавиться от иррациональности в знаменате-

ле: $\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}.$

Ответ: $2-\sqrt{3}$

ПРИМЕР 5. Упростить выражение $\cos\alpha+\cos(120^{\circ}+\alpha)+\cos(120^{\circ}-\alpha)$.

Применяя формулы $\begin{array}{l}\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{array}$

получим:

$$\cos\alpha+\cos(120^{\circ}+\alpha)+\cos(120^{\circ}-\alpha)=\cos\alpha+\cos120^{\circ}\cos\alpha-\sin120^{\circ}\sin\alpha+\cos120^{\circ}\cos\alpha+\sin120^{\circ}\sin\alpha=$$

$$=\cos\alpha+2\cos\alpha\cos120^{\circ}=\cos\alpha+2\cos\alpha\cos(90^{\circ}+30^{\circ})=\cos\alpha+2\cos\alpha(\cos90^{\circ}\cos30^{\circ}-\sin90^{\circ}\sin30^{\circ})=$$

$$=\cos\alpha+2\cos\alpha(-\sin30^{\circ})=\cos\alpha+2\cos\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)=\cos\alpha-\cos\alpha=0.$$

Ответ: 0.

Можно было при преобразовании $\cos(120^{\circ}\pm\alpha)$ использовать формулы приведения:

$$\cos(120^{\circ}+\alpha)=\cos(90^{\circ}+30^{0}+\alpha)=-\sin(30^{0}+\alpha)=\cdots.$$

ПРИМЕР 6. Найти значение частного $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta}$.

Принимая во внимание формулы $\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{array}$

получаем:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-2\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+2\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}=\mathrm{tg}(\beta-\alpha).$$

ПРИМЕР 7. Преобразовать выражение $\dfrac{\sin^{2}(\alpha+\beta)+\sin^{2}(\alpha-\beta)}{2\cos^{2}\alpha\cos^{2}\beta}$.

Применяя формулы

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

получаем:

$$\frac{\sin^{2}(\alpha+\beta)+\sin^{2}(\alpha-\beta)}{2\cos^{2}\alpha\cos^{2}\beta}=\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^{2}+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^{2}}{2\cos^{2}\alpha\cos^{2}\beta}=$$

$$=\frac{2\sin^{2}\alpha\cos^{2}\beta+2\cos^{2}\alpha\sin^{2}\beta}{2\cos^{2}\alpha\cos^{2}\beta}=\frac{\sin^{2}\alpha\cos^{2}\beta}{\cos^{2}\alpha\cos^{2}\beta}+\frac{\cos^{2}\alpha\sin^{2}\beta}{\cos^{2}\alpha\cos^{2}\beta}=\frac{\sin^{2}\alpha}{\cos^{2}\alpha}+\frac{\sin^{2}\beta}{\cos^{2}\beta}=tg^{2}\alpha+tg^{2}\beta.$$

ПРИМЕР 8. Вычислить $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, если $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}-\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=2\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}.$$

ПРИМЕР 9. Вычислить tgx, если $\sin(x+30^{0})+\sin(x-30^{0})=2\sqrt{3}\cos x$.

Преобразуем левую часть равенства: $\sin(x+30^{0})+\sin(x-30^{0})=2\sin x\cdot\cos30^{0}=\sqrt{3}\sin x$.

Тогда $\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}\cos x$. Разделив левую и правую часть равенства на cos x, получаем $\mathrm{tgx}=2$

Ответ: 2.

Проверьте себя.

1. Вычислите с помощью формул сложения sin 150°.
2. Вычислите с помощью формул сложения tg 165°.

3. Вычислите с помощью формул сложения: $\cos\frac{5\pi}{4}$.

4. Вычислите: $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

5. Упростите выражение: $\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha-\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha$.

6. Упростите выражение: $\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha$.

7. Упростите выражение: $\sin(\alpha-\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta$.

8. Вычислите: $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

9. Упростите выражение: $\cos\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right)$.

Ответы: 1. 0,5 2. $\sqrt{3}-2$ 3. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4. $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. 5. $\cos 5\alpha$ 6. $\sin\alpha$ 7. $\sin\alpha\cdot\cos\beta$ 8. 0 9. 0

ТЕСТ 1.

1. Вычислите с помощью формул сложения $\sin 105^\circ$.

1) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

3) $-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)$

2. Вычислите с помощью формул сложения $\cos 15^\circ$.

1) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$ 2) $-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

3) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

3. Вычислите с помощью формул сложения $\sin 75^\circ$.

1) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)$

3) $-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

4. Вычислите: $\sin(\alpha+\beta)$, если

$\sin\alpha=-\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\alpha,\beta\in\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

1) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$ 2) $\frac{2\left(\sqrt{10}+1\right)}{9}$

3) $\frac{2\left(\sqrt{10}+1\right)}{3}$ 4) $\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{9}$

5. Упростите выражение:

$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

1) $\sin\alpha$ 2) $\cos\alpha$ 3) 0 4) –1

6. Упростите выражение:

$\sin 2\alpha\cdot\cos 3\alpha+\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha$.

1) $\sin 5\alpha$ 2) $\sin\alpha$ 3) $\cos\alpha$ 4) $\cos 5\alpha$

7. Упростите выражение:

$\cos\alpha\cos 2\alpha+\sin(-\alpha)\sin 2\alpha$.

1) $\cos 3\alpha$ 2) $\cos\alpha$ 3) $\sin\alpha$ 4) $\sin 3\alpha$

8. Упростите выражение:

$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin(-\alpha)\cdot\sin 2\alpha$.

1) $\cos 3\alpha$ 2) $\cos\alpha$ 3) $\sin\alpha$ 4) $\sin 3\alpha$

9. Упростите выражение:

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

1) $\cos\alpha$ 2) $\sin\alpha$ 3) 0 4) –1

10. Упростите выражение:

$\cos(\alpha+\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$.

1) $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ 2) $-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

3) $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ 4) $-\cos\alpha\cdot\cos\beta$

11. Упростите выражение:

$\sin\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)$

1) $-\cos\alpha$ 2) $\sin\alpha$ 3) 1 4) 0

12. Вычислите:

$5\sqrt{17}\sin\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha=-4$, $-90^\circ<\alpha<90^\circ$.

1) $10\sqrt{17}$ 2) –20 3) –10 4) $-10\sqrt{17}$

110. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДВОЙНОГО УГЛА.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}, \quad \mathrm{ctg}2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{2\mathrm{tg}\alpha}$$

Эти формулы легко выводятся из формул суммы:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha} = \frac{2\cdot\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$$

Важно запомнить ещё две формулы для косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cdot\cos^2\alpha - 1$$

Итак, Вы сможете использовать одну из трёх формул косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

ПРИМЕР 1. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Для вычисления используем формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и условия задачи следует, что: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Подставляя значения синуса и косинуса в указанную формулу, получаем $\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$.

Ответ: 24/25.

ПРИМЕР 2. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Применяем формулу $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. С помощью основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ находим, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Следовательно, $\cos 2\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$.

Ответ: –7/25.

ПРИМЕР 3. Вычислить $\mathrm{tg}2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{4}$.

На основании формулы $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$ получаем: $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\cdot\frac{5}{4}}{1-\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{\frac{10}{4}}{\frac{16-25}{16}} = \frac{\frac{10}{4}}{\frac{-9}{16}} = -\frac{10\cdot 16}{9\cdot 4} = -\frac{40}{9}$.

Ответ: –40/9.

ПРИМЕР 4. Упростить выражение $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$.

Учитывая формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ и основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \frac{1+\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = 1.$$

Ответ: 1.

ПРИМЕР 5. Найти значение частного $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$.

$$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{1-(1-2\sin^2\alpha)+\sin 2\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\mathrm{tg}\alpha$$

Ответ: $\mathrm{tg}\alpha$

ПРИМЕР 6. Вычислить значение суммы $\mathrm{tg}435^\circ+\mathrm{tg}375^\circ$.

Поскольку $435^\circ=450^\circ-15^\circ$, $375^\circ=360^\circ+15^\circ$, то с помощью формул приведения находим:

$$\mathrm{tg}435^\circ+\mathrm{tg}375^\circ=\mathrm{tg}(450^\circ-15^\circ)+\mathrm{tg}(360^\circ+15^\circ)=\mathrm{ctg}15^\circ+\mathrm{tg}15^\circ=\frac{\cos15^\circ}{\sin15^\circ}+\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}=$$

$$=\frac{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ}{\sin15^\circ\cos15^\circ}=\frac{1}{\sin15^\circ\cos15^\circ}=\frac{2}{2\sin15^\circ\cos15^\circ}=\frac{2}{\sin30^\circ}=\frac{2}{1/2}=4$$

Ответ: 4.

ПРИМЕР 7. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-1/4$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\frac{1}{16}=\frac{7}{8}$.

Ответ: 0,875.

***

Важно понимать, что «двойной угол» – это не обязательно 2α. Под «двойным углом» понимают угол в 2 раза больший какого–то другого угла.

Например, угол 4α в 2 раза больше угла 2α.

Тогда $\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha$, $\cos 4\alpha=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$ и т.д.

Угол α в 2 раза больше угла α/2. Тогда $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$.

<u>Пример 8</u>.

Например, вычислить $\mathrm{tg}\alpha$, если $\mathrm{tg}(\alpha/2)=2$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=-\frac{4}{3}.$$

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

***

Если Вам встретилось выражение $\sin\alpha\pm\cos\alpha=a$, то возведение обеих частей в квадрат часто упрощает решение.

Получаем: $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=a^2 \quad\Rightarrow\quad \sin^2\alpha\pm2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=a^2 \quad\Rightarrow\quad 1\pm\sin 2\alpha=a^2$

ПРИМЕР 9. Например, вычислить $\sin(\pi+2\alpha)$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Возведём обе части в квадрат и получим $1+\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$. Тогда $\sin 2\alpha=-\frac{1}{2}$.

Получаем $\sin(\pi+2\alpha)=-\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

ПРИМЕР 10. Вычислите: $\sin 2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=2$.

Важно понять рассуждение о знаке sin 2α. Т.к. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$, то знаки sin α и cos α совпадают. Это означает, что произведение sin α и cos α больше нуля. Зная, tg α, мы можем найти значения sin α и cos α. Мы не сможем определить знаки sin α и cos α, но мы знаем, что произведение будет положительным.
Ответ: 0,8.

Проверьте себя:

1. Вычислить cos 2α, если cos α = 1/5.
2. Найдите tg 2α, если tg α = 1,5.
3. Вычислите: $\mathrm{tg}2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
4. Вычислите: $2\sin 22^o30' \cdot \cos 22^o30'$.
5. Вычислите: $(\sin 15^o - \cos 15^o)^2$.
6. Упростите выражение: $\cos 20^o \cos 70^o$.
7. Вычислите: $\cos^2 75^o - \sin^2 75^o$.
8. Вычислить $\sin(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha)$, если $\sin\alpha = -\sqrt{0{,}7}$
9. Вычислите: $\sqrt{3}(1 - 2\sin^2 735^o)$
10. Вычислить ctg α, если tg (α/2) = –2.
11. Вычислите: $\dfrac{4 \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{\pi}{12}}$.
12. Упростите выражение: $\dfrac{1 - \mathrm{ctg}^2 15^o}{2\mathrm{ctg}15^o}$.
13. Вычислите: $a = \mathrm{ctg}^2(630^o + 2x)$, если $\cos x = 0{,}5$.
14. Вычислите: $\mathrm{ctg}\alpha$, если $\cos 2\alpha = -0{,}28$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
15. Упростите: $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$.
16. Упростите: $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}$.
17. Вычислите: $\sin 4\alpha$, если $\sin 2\alpha = -0{,}6$, $135^o < \alpha < 180^o$.
18. Упростите выражение: $\dfrac{\cos(2\pi - x)\cos^2(1{,}5\pi + x)}{\mathrm{tg}(x - \pi)\sin(0{,}5\pi + x)}$.

Ответы: 1. –0,92 2. –2,4 3. $-\frac{\sqrt{15}}{7}$ 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5. 0,5 6. $\frac{1}{2}\sin 40^0$ 7. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 8. 0,4 9. 1,5 10. 0,75 11. $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$ 12. $-\sqrt{3}$ 13. a = 3 14. –0,75 15. 1 16. $\mathrm{tg}\alpha$ 17. –0,96 18. $0{,}5\sin 2x$ 19. $\mathrm{ctg}\alpha$

ТЕСТ 1

1. Вычислить $\cos(\pi + 2\alpha)$, если $\sin\alpha = \sqrt{0{,}3}$
1) 0,4 2) –0,4 3) 0,6 4) –0,6

2. Вычислите: $\cos 2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{5}$
1) –13/12 2) 13/12 3) –12/13 4) 12/13

3. Вычислите: $\sin 2\alpha$, если $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$
1) 1/2 2) –1/2 3) 4/5 4) –4/5

4. Вычислите: $3\mathrm{tg}2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}5$.
1) 0 2) 2 3) 4 4) –2

5. Упростите выражение: $\dfrac{1 - \mathrm{tg}^2 15^o}{2\mathrm{tg}15^o}$.
1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\sqrt{3}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 4) 1

6. Вычислите: $\mathrm{tg}^2 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{11}}$.
1) 112/9 2) 12/7 3) 4/11 4) 11/4

7. Вычислите: $\mathrm{tg}^{-2}\left(\frac{7\pi}{2} + 2\alpha\right)$, если $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
1) 4 2) –4 3) 8 4) –8

8. Вычислите: $\sqrt{2} \cdot \sin 22{,}5^o \cos 22{,}5^o$.
1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ 3) 2 4) 0,5

9. Вычислите: $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$.
1) 0 2) 0,5 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) 1

10. Упростите: $2\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.
1) $\sin 2\alpha$ 2) $-\sin 2\alpha$ 3) $\cos 2\alpha$ 4) $-\cos 2\alpha$

11. Вычислите: $\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.
1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$ 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. Вычислите: $\cos^2 22^o30' - \sin^2 22^o30'$.
1) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\sqrt{2}$

13. Вычислите: $\left(\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\right)^2$.

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $-\frac{1}{2}$

14. Упростите выражение:

$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin^2(\pi-\alpha)$.

1) $\sin 2\alpha$ 2) $-\sin 2\alpha$ 3) $\cos 2\alpha$ 4) $-\cos 2\alpha$

15. Вычислите: $(\cos 75^\circ+\sin 75^\circ)^2$.

1) 0,5 2) 1 3) 1,5 4) 2,5

16. Упростите: $\cos^2\alpha-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

1) $\cos 2\alpha$ 2) $\sin 2\alpha$ 3) $-\cos 2\alpha$ 4) $-\sin 2\alpha$

17. Вычислите: $\dfrac{2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}{\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}}$.

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $-\sqrt{2}$

18. Упростите выражение: $\dfrac{2\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(-2\alpha)}$.

1) $\cos 2\alpha$ 2) $-\frac{1}{\cos\alpha}$ 3) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ 4) $-\frac{1}{\cos^3\alpha}$

19. Вычислите:

$\operatorname{tg}4\alpha$, если $\sin 2\alpha=-0{,}6$, $135^\circ<\alpha<180^\circ$.

1) 13/7 2) –24/7 3) 15/7 4) –12/7

20. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha/2)=3$

1) $\frac{25}{12}$ 2) $-\frac{25}{12}$ 3) $\frac{9}{4}$ 4) $-\frac{9}{4}$

21. Вычислите:

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\cos 2\alpha=\frac{1}{3}$.

1) –1/2 2) 1/2 3) 1/4 4) –1/4

22. Упростите выражение: $\dfrac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

1) $2\sin\frac{\alpha}{2}$ 2) $\sin\frac{\alpha}{2}$ 3) $\sin 2\alpha$ 4) $2\sin\alpha$

23. Упростите: $\dfrac{\cos 2\alpha+1}{\sin 2\alpha}$.

1) $\sin\alpha$ 2) $\cos\alpha$ 3) $\operatorname{tg}\alpha$ 4) $\operatorname{ctg}\alpha$

24. Упростите: $\cos 2\alpha+2\sin^2(-\alpha)$.

1) –1 2) 0 3) 1 4) $\cos^2\alpha$

25. Упростите выражение: $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}$.

1) $\operatorname{tg}\alpha$ 2) $\operatorname{ctg}\alpha$ 3) $\sin\alpha$ 4) $\cos\alpha$

26. Упростите выражение: $\dfrac{\cos 160^\circ}{\cos^4 10^\circ-\sin^4 10^\circ}$.

1) –1 2) 1 3) $-\cos 40^\circ$ 4) $\cos 40^\circ$

111. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ СУММ И РАЗНОСТЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

Преобразование в произведение сумм и разностей тригонометрических функций осуществляется по формулам:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \qquad \mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} \qquad \mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

ПРИМЕР 1. Вычислить $\cos\alpha+\cos\beta$, если $\alpha+\beta=4\pi$, $\alpha-\beta=\pi/2$

Применяя формулу суммы косинусов, имеем:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cdot\cos\frac{4\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi/2}{2}=2\cdot\cos 2\pi\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

. Ответ: $\sqrt{2}$.

ПРИМЕР 2. Упростите выражение: $\dfrac{\cos 9\alpha-\cos\alpha}{\sin 9\alpha+\sin\alpha}$.

$$\frac{\cos 9\alpha-\cos\alpha}{\sin 9\alpha+\sin\alpha}=\frac{-2\sin\dfrac{9\alpha+\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{9\alpha-\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{9\alpha+\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{9\alpha-\alpha}{2}}=\frac{-2\sin 5\alpha\cdot\sin 4\alpha}{2\sin 5\alpha\cdot\cos 4\alpha}=-tg4\alpha$$

. Ответ: $-\mathrm{tg}4\alpha$

ПРИМЕР 3. Представить в виде произведения $\sin\frac{5}{3}\alpha+\sin\frac{3}{2}\alpha$

Применяя формулу суммы синусов, найдем $\sin\frac{5}{3}\alpha+\sin\frac{3}{2}\alpha=2\cdot\sin\frac{19\alpha}{12}\cdot\cos\frac{\alpha}{12}$

Ответ: $2\cdot\sin\frac{19\alpha}{12}\cdot\cos\frac{\alpha}{12}$.

ПРИМЕР 4. Преобразуйте в произведение: $\sin^2 43^o-\sin^2 13^o$.

$$\sin^2 43^o-\sin^2 13^o=\left(\sin 43^o-\sin 13^o\right)\cdot\left(\sin 43^o+\sin 13^o\right)=$$

$$=2\cdot\cos\frac{43^0+13^0}{2}\cdot\sin\frac{43^0-13^0}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{43^0+13^0}{2}\cdot\cos\frac{43^0-13^0}{2}=$$

$$=2\cdot\cos 28^0\cdot\sin 15^0\cdot 2\cdot\sin 28^0\cdot\cos 15^0=\left(2\cdot\cos 28^0\sin 28^0\right)\cdot\left(2\cdot\sin 15^0\cdot\cos 15^0\right)=$$

$$=\sin 56^0\cdot\sin 30^0=\frac{1}{2}\cdot\sin 56^0$$

Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\sin 56^0$

ПРИМЕР 5. Представить в виде произведения $\cos 10\alpha\cdot\cos 8\alpha+\cos 8\alpha\cdot\cos 6\alpha$

Вынеся за скобки общий множитель $\cos 8\alpha$, получим

$$\cos 8\alpha\cdot(\cos 10\alpha+\cos 6\alpha)=\cos 8\alpha\cdot(2\cos 8\alpha\cdot\cos 2\alpha)=2\cdot\cos^2 8\alpha\cdot\cos 2\alpha$$

Ответ: $2\cdot\cos^2 8\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

***

ПРИМЕР 6. Представить в виде произведения $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$

Группируем первое и третье слагаемое, чтобы из α и 3α получить 2α:

$$\left(\sin\alpha+\sin 3\alpha\right)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}+\sin 2\alpha = 2\sin 2\alpha\cdot\cos(-\alpha)+\sin 2\alpha =$$

$$2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\cos\alpha\cdot\left(\sin 2\alpha+\sin\alpha\right) = 4\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

Ответ: $4\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$.

ПРИМЕР 7. Вычислить $\dfrac{\cos 9^0+\cos 51^0+\sqrt{3}\cos 21^0}{2\sqrt{3}\cos 21^0}$

Т.к. $\cos 9^0+\cos 51^0 = 2\cos 30^0\cos 21^0 = \sqrt{3}\cos 21^0$, то $\dfrac{\cos 9^0+\cos 51^0+\sqrt{3}\cos 21^0}{2\sqrt{3}\cos 21^0} = \dfrac{2\sqrt{3}\cos 21^0}{2\sqrt{3}\cos 21^0} = 1$

Ответ: 1.

ПРИМЕР 8. Вычислить $\dfrac{\sin 43^0+\sin 17^0}{2\cos 13^0+3\sin 77^0}$

Для того, чтобы иметь дело с суммой подобных слагаемых, учтём, что sin 77º = cos 13º.

$$\frac{\sin 43^0+\sin 17^0}{2\cos 13^0+3\sin 77^0} = \frac{2\sin 30^0\cos 13^0}{2\cos 13^0+3\cos 13^0} = \frac{1}{5}$$

Ответ: 0,2.

ПРИМЕР 9. Вычислить $\dfrac{\cos 6^0+\cos 12^0+\cos 36^0+\cos 42^0}{\sin 87^0\cos 15^0\cos 24^0}$

Имеем $\cos 6^0+\cos 12^0+\cos 36^0+\cos 42^0 = 2\cos 3^0\cos 9^0+2\cos 3^0\cos 39^0 =$
$= 4\cos 3^0\cos 15^0\cos 24^0$, а $\cos 3° = \sin 87°$.

Поэтому $\dfrac{\cos 6^0+\cos 12^0+\cos 36^0+\cos 42^0}{\sin 87^0\cos 15^0\cos 24^0} = \dfrac{4\sin 87^0\cos 15^0\cos 24^0}{\sin 87^0\cos 15^0\cos 24^0} = 4$. Ответ: 4.

ПРИМЕР 10. Вычислить $\dfrac{2\cos 23^0-3\sin 113^0+\cos 203^0}{\cos 10^0\cos 13^0-\cos 80^0\cos 77^0}$

$$\frac{2\cos 23^0-3\sin 113^0+\cos 203^0}{\cos 10^0\cos 13^0-\cos 80^0\cos 77^0} = \frac{2\cos 23^0-3\cos 23^0-\cos 23^0}{\cos 23^0} = -2$$ Ответ: –2.

ПРИМЕР 11. Вычислить $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, если $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$. Ответ: 0,75.

ПРИМЕР 12. Вычислить $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x+30^0)+\sin(x-30^0) = 2\sqrt{3}\cos x$

Т.к. $\sin(x+30^0)+\sin(x-30^0) = 2\sin x\cdot\cos 30^0 = \sqrt{3}\sin x$, то $\sqrt{3}\sin x = 2\sqrt{3}\cos x$, откуда $\operatorname{tg} x = 2$

Ответ: 2.

ПРИМЕР 13. Вычислить, чему равно А, если

$$A = \left(\cos 70^o+\cos 50^o\right)\cdot\left(\cos 310^o+\cos 290^o\right)+\left(\cos 40^o+\cos 160^o\right)\cdot\left(\cos 320^o-\cos 380^o\right).$$

Сначала с помощью формул приведения уменьшим все углы до значений, меньших 90^0.

$\cos 310^o = \cos 50^o$ $\quad\cos 290^o = \cos 70^o$ $\quad\cos 160^o = -\cos 20^o$ $\quad\cos 320^o = \cos 40^o$ $\quad\cos 380^o = \cos 20^o$

Получаем $A = \left(\cos 70°+\cos 50°\right)\cdot\left(\cos 50°+\cos 70°\right)+\left(\cos 40°-\cos 20°\right)\cdot\left(\cos 40°-\cos 20°\right)$

$$A = \left(2\cos 60^o\cdot\cos 10^o\right)^2+\left(2\cos 60^o\cdot\sin\left(-10^o\right)\right)^2 = \left(2\cdot\frac{1}{2}\cos 10^o\right)^2+\left(-2\cdot\frac{1}{2}\sin 10^o\right)^2 = \cos^2 10^o+\sin^2 10^o = 1.$$

Заметьте, что мы выполняли преобразования так, чтобы складывать или вычитать косинус с косинусом (или же синус с синусом), т.к. не существует формул $\cos \pm \sin$.

ПРИМЕР 14. Вычислить $\left(\mathrm{tg}20^0+\mathrm{tg}70^0\right)\cdot\sin 40$

$$\left(\mathrm{tg}20^0+\mathrm{tg}70^0\right)\cdot\sin 40^0=\frac{\sin\left(20^0+70^0\right)}{\cos 20^0\cdot\cos 70^0}\cdot\sin 40^0=\frac{1}{\cos 20^0\cdot\sin 20^0}\cdot 2\cdot\sin 20^0\cdot\cos 20^0=2$$

Проверьте себя.

1. Представьте в виде произведения: $\sin 36^{\circ}+\sin 24^{\circ}$.
2. Преобразуйте в произведение: $\sin 9\alpha+\sin\alpha$.
3. Преобразуйте в произведение: $\cos 6\alpha-\cos\alpha$.
4. Вычислить $\sin\alpha+\sin\beta$, если $\alpha+\beta=3\pi;\ \alpha-\beta=\pi/3$
5. Упростите выражение: $\dfrac{\sin 7\alpha+\sin\alpha}{\cos 7\alpha+\cos\alpha}$.
6. Преобразуйте в произведение: $\cos^2 47^{\circ}-\cos^2 17^{\circ}$.
7. Представить в виде произведения $\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha\sin 3\alpha-\cos 4\alpha$
8. Представить в виде произведения $\sin 10\alpha\sin 8\alpha+\sin 8\alpha\sin 6\alpha$
9. Упростить $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{tg}\left(\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$
10. Вычислить $\left(\mathrm{tg}40^0+\mathrm{tg}50^0\right)\cdot\sin 80$

Ответы: 1. $\cos 6^0$ 2. $2\sin 5\alpha\cdot\cos 4\alpha$ 3. $-2\sin 3{,}5\alpha\cdot\sin 2{,}5\alpha$ 4. $-\sqrt{3}$ 5. $\mathrm{tg}4\alpha$ 6. $-\dfrac{1}{2}\cdot\sin 64^0$

7. $4\cdot\sin\dfrac{3\alpha}{2}\cdot\sin 3\alpha\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 8. $2\sin^2 8\alpha\cdot\cos 2\alpha$ 9. $2\cdot\mathrm{tg}\dfrac{2\alpha}{3}$ 10. 2

ТЕСТ 1

1. Представьте в виде произведения: $\sin 18^{\circ}+\sin 11^{\circ}$.

1) $2\sin 14{,}5^0\cdot\cos 3{,}5^0$ 2) $2\sin 29^0\cdot\cos 7^0$
3) $2\sin 3{,}5^0\cdot\cos 14{,}5^0$ 4) $2\sin 29^0\cdot\cos 7^0$

2. Преобразуйте в произведение: $\sin 5\alpha+\sin 3\alpha$.

1) $2\sin\alpha\cdot\cos 4\alpha$ 2) $2\sin 4\alpha\cdot\cos\alpha$
3) $\sin\alpha\cdot\cos 4\alpha$ 4) $\sin 4\alpha\cdot\cos\alpha$

3. Преобразуйте в произведение: $\sin 8\alpha-\sin 4\alpha$.

1) $2\cos 2\alpha\cdot\sin 6\alpha$ 2) $\dfrac{1}{2}\cos 6\alpha\cdot\sin 2\alpha$
3) $2\cos 6\alpha\cdot\sin 2\alpha$ 4) $\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha\cdot\sin 6\alpha$

4. Преобразуйте в произведение: $\cos 27\alpha+\cos 17\alpha$.

1) $2\cdot\cos 22\alpha\cdot\cos 5\alpha$ 2) $2\cdot\sin 22\alpha\cdot\cos 5\alpha$
3) $2\cdot\cos 22\alpha\cdot\sin 5\alpha$ 4) $2\cdot\sin 22\alpha\cdot\sin 5\alpha$

5. Преобразуйте в произведение: $\sin^2 42^{\circ}-\sin^2 12^{\circ}$. 1) $\cos 54^0$ 2) $2\cdot\sin 54^0$
3) $\dfrac{1}{2}\cdot\cos 54^0$ 4) $\dfrac{1}{2}\cdot\sin 54^0$

6. Упростите выражение: $\dfrac{\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}{\cos\alpha+\cos 9\alpha}$.

1) $\dfrac{\cos 5\alpha}{\cos 4\alpha}$ 2) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}$ 3) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos 8\alpha}$ 4) 1

7. Упростите выражение: $\dfrac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 5\alpha-\cos\alpha}$.

1) $\mathrm{ctg}3\alpha$ 2) $-\mathrm{ctg}3\alpha$ 3) $-\mathrm{tg}3\alpha$ 4) $\mathrm{ctg}2\alpha$

8. Вычислить
$\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$, если $\alpha+\beta=2\pi/3;\ \alpha-\beta=\pi/3$

1) 0,5 2) 1 3) 1,5 4) 3

9. Вычислить $\dfrac{\sqrt{2}(\cos 25^0-\cos 65^0)}{\sin 20^0}$

1) 0,5 2) 1 3) 1,5 4) 2

10. Представить в виде произведения
$\sin 2\alpha\sin 3\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\cos 5\alpha$

1) $\sin 2\alpha\sin 3\alpha$ 2) $2\sin 2\alpha\sin 3\alpha$
3) $\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 3\alpha$ 4) 0

11. Упростить $\left(\mathrm{tg}3\alpha-\mathrm{tg}\alpha\right)\cdot\dfrac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha}$

1) 1. 2) 2. 3) $\sin 2\alpha\cos 3\alpha$ 4) $\sin 3\alpha\cos 2\alpha$

112. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУСУММУ И ПОЛУРАЗНОСТЬ.

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\qquad \sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

При нахождении произведения тангенсов или котангенсов, находят отношение произведения синусов к произведению косинусов или наоборот. $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$

ПРИМЕР. Найти значение разности $\dfrac{1}{2\sin10^o}-2\sin70^o$.

Приводя эту разность к общему знаменателю и применяя формулу $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$,

находим: $$\frac{1}{2\sin10^o}-2\sin70^o=\frac{1-4\sin10^o\sin70^o}{2\sin10^o}=\frac{1-2\left(\cos60^o-\cos80^o\right)}{2\sin10^o}=\frac{1-2\left(\frac{1}{2}-\cos80^o\right)}{2\sin10^o}=$$

$$=\frac{1-2\cdot\frac{1}{2}+2\cos80^o}{2\sin10^o}=\frac{2\cos80^o}{2\sin10^o}=\frac{\cos80^o}{\cos80^o}=1$$

ПРИМЕР. Вычислить значение произведения $\sin20^o\cdot\sin40^o\cdot\sin80^o$.

Такие Примеры надо решать «тупо в лоб», перемножая в любой последовательности, и упрощая пример, как только появится табличная величина.

$$\sin20^o\cdot\sin40^o\cdot\sin80^o=\left(\sin20^o\cdot\sin40^o\right)\cdot\sin80^o=\frac{1}{2}\left(\cos20^o-\cos60^o\right)\cdot\sin80^o=\frac{1}{2}\sin80^o\cdot\cos20^o-\frac{1}{4}\cdot\sin80^o=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sin100^o+\sin60^o\right)-\frac{1}{2}\cdot\sin80^o\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sin100^o+\frac{1}{2}\cdot\sin60^o-\frac{1}{2}\cdot\sin80^o\right)=\frac{1}{4}\cdot\sin60^o=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

(Здесь использовано равенство $\sin100^0=\sin80^0$). Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

ПРИМЕР. Вычислить значение произведения $\cos20^o\cdot\cos40^o\cdot\cos80^o$.

Этот пример можно гарантированно решить также, как и предыдущий. Но есть ещё один фокус, который подходит для некоторых примеров.Умножим и разделим данное произведение на $2\sin20^0$ для получения синуса двойного угла.

$$\cos20^o\cdot\cos40^o\cdot\cos80^o=\frac{2\cdot\sin20^o\cdot\cos20^o\cdot\cos40^o\cdot\cos80^o}{2\cdot\sin20^o}=\frac{\sin40^o\cdot\cos40^o\cdot\cos80^o}{2\cdot\sin20^o}=$$

$$=\frac{2\cdot\sin40^o\cdot\cos40^o\cdot\cos80^o}{4\cdot\sin20^o}=\frac{\sin80^o\cdot\cos80^o}{4\cdot\sin20^o}=\frac{\sin160^o}{8\cdot\sin20^o}=\frac{\sin20^o}{8\cdot\sin20^o}=\frac{1}{8}$$

Ответ: 1/8.

ТЕСТ 1.

1. Вычислите: $8\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\sin52^\circ30'\cdot\cos7^\circ30'$.

1) 1. 2) 2. 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 4) 3.

2. Вычислить $\sin43^0\sin17^0+\sin^2 13^0-2$

1) –2,75. 2) –2,25. 3) –1,75. 4) –0,25

3. Вычислите: $\sin70^o\cdot\sin50^o\cdot\sin10^o$.

1) 0,25. 2) 3/4. 3) 1/8. 4) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

4. Решите выражение: $4\sin25^o\sin35^o\sin85^o$.

1) –0,5. 2) $0{,}5\sqrt{3}$. 3) $-0{,}5\sqrt{3}$. 4) $\cos15^0$.

5. Решите выражение: $\cos24^o\cdot\left(1+\mathrm{tg}12^o\cdot\mathrm{tg}24^o\right)$.

1) –2. 2) 2. 3) –1. 4) 1.

6. Вычислите: $\mathrm{tg}20^o\cdot\mathrm{tg}40^o\cdot\mathrm{tg}80^o$.

1) $\sqrt{3}$. 2) 2. 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 4) 3.

113. ФОРМУЛЫ ПОНИЖЕНИЯ СТЕПЕНИ И ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО УГЛА.

Из формул косинуса двойного угла можно получить формулы понижения степени и формулы половинного угла.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \Rightarrow 2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

Итак, мы получили формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Эти же формулы, записанные в виде

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \quad \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

можно назвать формулами половинного угла.

ПРИМЕР. Вычислить $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$.

Применяя формулу $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, находим:

$$tg^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} = \frac{6-4\sqrt{2}}{4-2} = 3-2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2.$$

ПРИМЕР. Вычислить $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}2$

Если Вы увидели квадрат и π/4, то обязательно примените формулу понижения степени.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+\sin\alpha\right) = \frac{1}{2}(1+0,2) = 0,6.$$

ПРИМЕР. Преобразовать выражение $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Если не видно никаких преобразований, то можно попробовать уменьшить угол в два раза, и использовать формулы двойного угла.

$$\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin 2\cdot\frac{\alpha}{2}}{1-\sin 2\cdot\frac{\alpha}{2}} = \frac{1+2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

ПРИМЕР. Вычислить $\frac{\sin^2 32^0+\sin 26^0}{5\cos^2 32^0}$

$$\frac{\sin^2 32^0+\sin 26^0}{5\cos^2 32^0} = \frac{\frac{1-\cos 64^0}{2}+\sin 26^0}{\frac{5}{2}(1+\cos 64^0)} = \frac{1-\cos 64^0+2\sin 26^0}{5(1+\cos 64^0)} = \frac{1-\cos 64^0+2\cos 64^0}{5(1+\cos 64^0)} = \frac{1}{5}$$

Замечание. Здесь принято во внимание, что $\sin 26^0 = \cos 64^0$

Ответ: 0,2.

ПРИМЕР. Вычислить $\dfrac{2\cos^2 16^0 + 2\cos^2 76^0 - 3}{\cos^2 44^0}$

Имеем $2\cos^2 16^0 = 1+\cos 32^0$, $2\cos^2 76^0 = 1+\cos 152^0$. Тогда

$$2\cos^2 16^0 + 2\cos^2 76^0 - 3 = \cos 32^0 + \cos 152^0 - 1 = \\ = 2\cos 92^0 \cos 60^0 - 1 = \cos 92^0 - 1 = -\cos 88^0 - 1.$$

Т.к. $\cos^2 44^0 = \dfrac{1+\cos 88^0}{2}$, то $\dfrac{2\cos^2 16^0 + 2\cos^2 76^0 - 3}{\cos^2 44^0} = \dfrac{-\cos 88^0 - 1}{\dfrac{1+\cos 88^0}{2}} = -2$

ПРИМЕР. Вычислить $\sin^2 68^0 - \sin^2 38^0 - 0{,}5\sin 106^0 + 3$

Поскольку $\sin^2 68^0 = \dfrac{1-\cos 136^0}{2}$, $\sin^2 38^0 = \dfrac{1-\cos 76^0}{2}$, имеем:

$$\sin^2 68^0 - \sin^2 38^0 = \frac{1}{2}(\cos 76^0 - \cos 136^0) = \sin 106^0 \sin 30^0 = \frac{1}{2}\sin 106^0$$

Таким образом, $\sin^2 68^0 - \sin^2 38^0 - 0{,}5\sin 106^0 + 3 = 3$

ПРИМЕР. Вычислить $2\sin 3\alpha \sin 2\alpha + \cos 5\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}6}$.

$$2\sin 3\alpha \sin 2\alpha + \cos 5\alpha = \cos\alpha - \cos 5\alpha + \cos 5\alpha = \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 =$$

$$= [\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}6}] = 2\cdot 0{,}6 - 1 = 0{,}2$$

ТЕСТ 1.

1. Вычислить $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}4$

1) 0,2 2) 0,3. 3) 0,4. 4) 0,5.

2. Упростите: $\dfrac{1+\sin\alpha - 2\sin^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{4\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

1) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ 2) $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$ 3) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ 4) $\sin\alpha$

3. Упростите: $\dfrac{\operatorname{ctg}^2(45^\circ + \alpha) - 1}{\operatorname{ctg}^2(45^\circ + \alpha) + 1}$.

1) $-\sin\dfrac{\alpha}{4}$ 2) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ 3) $\sin\alpha$ 4) $-\sin 2\alpha$

4. Упростите: $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha}$.

1) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ 2) $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$ 3) $-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$ 4) $\operatorname{tg}\alpha$

5. Вычислите:

$\sin\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

1) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. 2) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. 3) $\dfrac{3}{5}$ 4) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

6. Вычислите: $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{2}$.

1) 12/5. 2) 13/5. 3) 13/12. 4) 5/12.

7. Вычислите: $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\sin 2\alpha = \dfrac{1}{3}$.

1) 0,2. 2) 0,3. 3) 0,5. 4) 0,8.

114. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИНУСА ДВОЙНОГО УГЛА.

Если Вам встретилось выражение $\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}=a$, то возведение обеих частей в квадрат часто упрощает решение. Получаем $\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=a^2 \Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2}\pm 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=a^2 \Rightarrow 1\pm\sin\alpha=a^2$

Например, вычислить $\sin(\pi+\alpha)$, если $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Возведём обе части в квадрат и получим $1+\sin\alpha=\frac{1}{2}$. Тогда $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$.

Получаем $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=\frac{1}{2}$. *Ответ:* 0,5.

ПРИМЕР. Вычислить $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$, если $\sin x=0{,}21$

$$\sin x=1+\sin x-1=\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)-1=\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)-1=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2-1$$

Отсюда $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{1+\sin x}=[\sin x=0{,}21]=\pm\sqrt{1{,}21}=\pm1{,}1$ *Ответ:* $\pm1{,}1$.

Часто используют и обратное преобразование: $1\pm\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$

ПРИМЕР. Вычислить $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

С одной стороны $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-\frac{1}{2}\cdot\sin^2 2\alpha$

С другой стороны $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow 1+2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin 2\alpha=-\frac{1}{2}$

Получаем $1-\frac{1}{2}\cdot\sin^2 2\alpha=\frac{7}{8}$. *Ответ*: $\frac{7}{8}$.

ПРИМЕР. Вычислить выражение $-2\sin^3\alpha-2\cos^3\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha+7\cos\alpha+7\sin\alpha-2$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Преобразуем выражение: $-2\cdot\left(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\right)-6\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+7\cdot\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)-2$

Возводим в квадрат обе части равенства: $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$

$\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{9}$ и получаем $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{4}{9}$.

Тогда $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)\cdot\left(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{4}{9}\right)=\frac{13}{27}$.

Следовательно, $-2\cdot\frac{13}{27}-6\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)+7\cdot\frac{1}{3}-2=-2\cdot\frac{13}{27}+5-2=\frac{14}{27}$. Ответ: $\frac{14}{27}$

Сумму или разность шестых степеней расписывайте как сумму или разность кубов.

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\cdot\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right)=$$

$$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}\cdot4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}\cdot\sin^2 2\alpha$$

Итого, $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\cdot\sin^2 2\alpha$, а формула разности $\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=-\cos2\alpha\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot\sin^2 2\alpha\right)$.

Обратите внимание на преобразование

$$\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\cdot 4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\cdot(2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2=\frac{1}{4}\cdot\sin^2 2\alpha$$

ТЕСТ 1.

1. Упростите: $\dfrac{\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{1+\sin\alpha}$.

1) 0,25. 2) 0,5. 3) 1. 4) 2.

2. Вычислите: $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

1) –1. 2) –0,75. 3) 0,75. 4) 1.

3. Найдите: $\sin\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{3}$.

1) $-\frac{8}{9}$. 2) $\frac{8}{9}$. 3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 4) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

4. Упростите и вычислите при $\alpha=\pi/12$: $\dfrac{1-\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha}{2\sin^4 2\alpha}+1$.

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4.

5. Вычислите:
$\cos^6\alpha-\sin^6\alpha$, если $\cos 2\alpha=0,4$.

1) 0,16. 2) 0,216. 3) 0,256. 4) 0,316.

6. Упростите: $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

1) 0,5. 2) 1. 3) 1,5. 4) 2.

115. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

1. Не пытайтесь придумать схему решения примера от начала до конца.
2. Не пытайтесь преобразовывать сразу весь пример. Продвигайтесь вперёд маленькими шагами.
3. Верьте, что всё будет хорошо.

ПРИМЕР. Решите выражение: $\frac{10+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{5-3\cos^2\alpha}$ при $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{1}{2}$.

Сначала надо догадаться применить основное тригонометрическое тождество.

$$\frac{10+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{5-3\cos^2\alpha}=\frac{10\cdot\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{5\cdot\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-3\cos^2\alpha}=\frac{10\cdot\sin^2\alpha+10\cdot\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{5\cdot\sin^2\alpha+5\cdot\cos^2\alpha-3\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{10\cdot\sin^2\alpha+10\cdot\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{5\cdot\sin^2\alpha+2\cdot\cos^2\alpha}$$

Теперь надо догадаться разделить числитель и знаменатель на $\cos^2\alpha$.

Получаем $\frac{10\cdot\sin^2\alpha+10\cdot\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{5\cdot\sin^2\alpha+2\cdot\cos^2\alpha}=\frac{10\cdot\operatorname{tg}^2\alpha+10+3\cdot\operatorname{tg}\alpha}{5\cdot\operatorname{tg}^2\alpha+2}$ и быстро заканчиваем пример.

ПРИМЕР. Вычислить $\frac{3(\cos 20^0-\sin 20^0)}{\sqrt{2}\sin 25^0}$.

Т.к. $\sin 20^0=\cos 70^0$, то $\frac{3(\cos 20^0-\sin 20^0)}{\sqrt{2}\sin 25^0}=\frac{3(\cos 20^0-\cos 70^0)}{\sqrt{2}\sin 25^0}=\frac{6\sin 45^0\sin 25^0}{\sqrt{2}\sin 25^0}=3$

ПРИМЕР. Вычислить $\sin 26^o+\cos 26^o\cdot\operatorname{tg}32^o$

В таком примере «решение в лоб» приведёт к самому короткому решению.

$$\sin 26^o+\cos 26^o\cdot\operatorname{tg}32^o=\sin 26^o+\cos 26^o\cdot\frac{\sin 32^o}{\cos 32^o}=\frac{\sin 26^o\cdot\cos 32^o+\cos 26^o\cdot\sin 32^o}{\cos 32^o}=\frac{\sin 58^o}{\cos 32^o}=1$$

ПРИМЕР. Вычислить $\frac{5\left(\cos\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{14}\right)}{\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{14}}$

Для вычитания $\cos\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{14}$ превратим косинус в синус помощью формул приведения

$$\cos\frac{2\pi}{7}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{7}\right)=\sin\frac{3\pi}{14}$$

Тогда $\cos\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{14}=\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{\pi}{14}=2\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{14}$

ПРИМЕР. Представить в виде произведения $1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$

$$1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=2\cos\alpha\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)$$

Это были очевидные преобразования. Теперь преобразуем в произведение $\cos\alpha+\sin\alpha$.

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\alpha=2\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\alpha}{2}=.$$

$$=\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

ЗАПОМНИТЕ ЭТО ОЧЕНЬ ВАЖНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. Ответ: $2\sqrt{2}\cdot\cos\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

Очень полезно запомнить и использовать следующие преобразования синуса и косинуса одинакового аргумента. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x\right)=\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Можно вести преобразования немного иначе.

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x\right)=\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

Аналогичные преобразования можно произвести, в случае разности синуса и косинуса одинакового аргумента. $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x\right)=\sqrt{2}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

или $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x\right)=-\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

Похожим образом будем вести преобразования, если перед синусом косинусом одинакового аргумента есть множитель $\sqrt{3}$.

$\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x+\frac{1}{2}\cdot\cos x\right)=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x\right)=2\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ и т.д.

ТЕСТ 1.

1. Упростите: $\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}-\mathrm{tg}\left(45^\circ+\alpha\right)$.

1) –1. 2) 0. 3) 1. 4) 2.

2. Упростить выражение

$$\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)-\sqrt{2}\cdot\sin\beta}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)-\sqrt{3}\cdot\cos\beta}.$$

1) –1. 2) 1. 3) $-\sqrt{2}\cdot\mathrm{ctg}\beta$ 4) $\sqrt{2}\cdot\mathrm{tg}\beta$

3. Вычислить $\frac{(1+\mathrm{tg}10^0)\cos10^0}{\sqrt{2}\sin55^0}$

1) –1. 2) 1. 3) $\sin10^0$. 4) $\sin35^0$.

4. Упростите:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}-\sin\alpha.$$

1) $\cos\alpha$. 2) $\sin\alpha$. 3) –1. 4) 1.

5. Упростите и вычислите при $\alpha=\pi/36$:

$\frac{\sqrt{3}\cos3\alpha}{10(\cos9\alpha+\cos3\alpha)}$. 1) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ 2) 1/10. 3) –1. 4) 1.

6. Упростите и вычислите при $\alpha=\pi/3$:

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}.$$

1) –1. 2) 1. 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4) $\frac{1}{2}$.

7. Упростите:

$$\frac{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)-\sin^2x}{\sin2x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin x\cdot\cos(\pi-2x)}.$$

1) cos x. 2) sin x. 3) tg x. 4) ctg x.

8. Упростите:

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha-2\cos\left(45^\circ-\alpha\right)}{2\sin\left(30^\circ+\alpha\right)-\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}+\sqrt{2}\cdot\mathrm{tg}\alpha.$$

1) –1. 2) 0. 3) 1. 4) $\sqrt{2}\cdot\mathrm{tg}\alpha$

9. Вычислите: $\cos2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{5}$.

1) 5/13. 2) 12/13. 3) 5/12. 4) –5/12.

10. Вычислите: $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

1) 0,3. 2) 0,4. 3) 0,6. 4) 0,8.

11. Вычислите:

$\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

1) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. 2) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 3) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. 4) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

12. Вычислите:

$$96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}.$$

1) 9. 2) 12. 3) 16. 4) 24.

13. Вычислите: $\sin2\alpha$, если $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$.

1) –4/5. 2) –3/5. 3) 3/5. 4) 4/5.

14. Вычислите:

$$\cos45^\circ\cdot\sin3105^\circ+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(-315^\circ\right)-\cos270^\circ.$$

1) –1. 2) 0. 3) 1. 4) 1,5.

15. Вычислите: $\frac{3\cos50^\circ-4\sin140^\circ}{\cos130^\circ}$.

1) –1. 2) –0,5. 3) 0,5. 4) 1.

16. Вычислите: $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=3$.

1) 0,3. 2) 0,4. 3) 0,6. 4) 0,8.

17. Вычислите:

$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}3$.

1) 0,3. 2) 0,4. 3) 0,6. 4) 0,8.

18. Вычислите: $\frac{2\cos^2\alpha-1}{8\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$.

1) 0,25. 2) 0,4. 3) –0,25. 4) –0,4.

19. Вычислите: $\frac{2\sin^2 70^\circ-1}{2\operatorname{ctg}115^\circ\cdot\cos^2 155^\circ}$.

1) –1. 2) –0,5. 3) 0,5. 4) 1.

20. Вычислите: $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\alpha=112^\circ 30'$.

1) $\sqrt{2}$ 2) $-\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{2}-1$ 4) $1-\sqrt{2}$.

21. Вычислите:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, если $\cos\alpha=0{,}7$.

1) 0,49. 2) 1,4. 3) 1,7. 4) 2.

22. Вычислите: $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

1) 0,16. 2) 0,28. 3) 0,32. 4) 0,45.

23. Вычислите: $\sin 2\alpha$, если

$4\sin^2\alpha+3\sin 2\alpha=4\cos^2\alpha$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

1) –0,3. 2) –0,4. 3) –0,6. 4) –0,8.

24. Вычислите: $\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ$.

1) –1. 2) –0,5. 3) 0,5. 4) 1.

25. Вычислите: $\sin 16^\circ+\cos 16^\circ\cdot\operatorname{tg}37^\circ$.

1) –1. 2) –0,5. 3) 0,5. 4) 1.

26. Вычислите по отдельности: $\cos 67^\circ 30'$ и $\cos 75^\circ$.

1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 4) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

27. Вычислите: $\frac{\operatorname{ctg}15^\circ+1}{2\operatorname{ctg}15^\circ}$.

1) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

28. Вычислите: $\frac{\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{19\pi}{18}}+2\cos\pi$.

1) –3. 2) –2. 3) –1. 4) 0.

29. Вычислите: $\frac{\sin 43^\circ+\sin 17^\circ}{2\cos 13^\circ+3\sin 77^\circ}$.

1) 0,1. 2) 0,2. 3) 0,5. 4) 1.

30. Вычислите: $\left(\frac{\sin 80^\circ+\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2$.

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4.

31. Вычислите: $\frac{16\sin 251^\circ-10\cos 161^\circ}{\cos 19^\circ}$.

1) –26. 2) –6. 3) 6. 4) 26.

32. Вычислите: $\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{16}+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{8}$.

1) –0,5. 2) 0,5. 3) 1. 4) 2.

33. Вычислите:

$\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$.

1) –0,5. 2) 0,5. 3) 1. 4) 2.

34. Вычислите:

$\operatorname{tg}18^\circ\cdot\operatorname{tg}288^\circ+\sin 32^\circ\cdot\sin 148^\circ-\sin 302^\circ\cdot\sin 122^\circ$.

1) –1. 2) 0. 3) 0,5. 4) 1.

35. Вычислите: $2\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ-\cos 20^\circ$.

1) –1. 2) 0. 3) 0,5. 4) 1.

36. Значение выражения равно: $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{36}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{31\pi}{36}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}\right)}$.

1) 1. 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{36}\right)$. 3) –1. 4) нет ответа.

37. Решите выражение: $\frac{1+\cos 1{,}1\pi}{\cos 0{,}6\pi}$.

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}$. 2) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}$. 3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$. 4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{20}$.

38. Решите выражение:

$\sin^3\frac{23\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}+\cos^3\frac{23\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24}$.

1) 0,375. 2) –0,125. 3) –0,25. 4) 0,125.

39. Решите выражение:

$\frac{\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}$ при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$.

1) 1. 2) –5/6. 3) 5/6. 4) –1/6.

40. Решите выражение: $\frac{\cos^2 37^\circ-\sin^2 23^\circ}{\sin 104^\circ}$.

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2) 1. 3) 1/2. 4) 2.

41. Решите выражение: $\frac{1}{\cos 105^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{\sin 285^\circ}$.

1) $4\sqrt{2}$. 2) $-4\sqrt{2}$. 3) $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 4) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

116. ТРИГОНОМЕТРИЯ. ИТОГОВЫЙ. БАЗОВЫЙ. ТЕСТ 1.

1. Вычислите: $\cos 105^{o}$. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$. 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)$. 3) $\frac{\sqrt{2}}{6}\left(1-\sqrt{3}\right)$. 4) $\frac{\sqrt{2}}{8}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

2. Упростите выражение: $\sin\left(\frac{9\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}+\alpha\right)$.

1) 0. 2) –1. 3) $\sin\alpha$. 4) $\cos 2\alpha$.

3. Упростите выражение: $\cos^{2}(\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

1) $\cos\alpha$. 2) $\sin\alpha$. 3) $\cos 2\alpha$. 4) $\sin 2\alpha$.

4. Вычислите: $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{8}{17}, \sin\beta=\frac{15}{17}$, $\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

1) $-\frac{1}{2}$. 2) $\frac{1}{2}$. 3) –1. 4) 1.

5. Вычислите: $\sin 4\alpha$, если $\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=-3$. 1) –0,48. 2) 0,48. 3) 0,72. 4) 0,96.

6. Вычислите: $2\sin 75^{o}\cos 75^{o}$. 1) $-\frac{1}{2}$. 2) $\frac{1}{2}$. 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Вычислите: $\cos(2\alpha-\pi)$, если $\sin\alpha=\sqrt{0{,}2}$. 1) –0,6. 2) 0,4. 3) 0,6. 4) 0,8.

8. Найдите: $\mathrm{tg}2\alpha$, если $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{3}{\sqrt{5}}$. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. 3) $\frac{3\cdot\sqrt{5}}{2}$. 4) $\frac{2\cdot\sqrt{5}}{2}$.

9. Упростите выражение: $\frac{\sin 8\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 2\alpha}$. 1) 1. 2) $\mathrm{tg}3\alpha$. 3) $\mathrm{tg}5\alpha$. 4) $\mathrm{tg}6\alpha$.

10. Вычислите: $\frac{1-4\sin 10^{o}\sin 70^{o}}{2\sin 10^{o}}$. 1) 0,25. 2) 3/4. 3) 1/8. 4) 1.

11. Решите выражение: $\mathrm{tg}70^{o}\,\mathrm{tg}50^{o}\,\mathrm{tg}10^{o}$. 1) $\sqrt{3}$. 2) 2. 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4) 3.

12. Вычислите: $A=\frac{\sin^{2}\left(4x-540^{o}\right)}{\cos^{2}\left(4x-540^{o}\right)}$, если $\sin 2x=3^{-\frac{1}{2}}$. 1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) 8.

13. Вычислите: $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$, если $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=2$. 1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4.

14. Решите выражение: $\cos^{2}\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)$ при $\sin 4\alpha=-0{,}2$. 1) 0,2. 2) 0,3. 3) 0,4. 4) 0,6.

15. Вычислить $\frac{\sin^{2}32^{0}+\sin 26^{0}}{5\cos^{2}32^{0}}$ 1) 0,2. 2) 0,4. 3) 0,6. 4) 0,8.

16. Найдите: $\sin\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. 1) $\frac{3}{4}$. 2) $-\frac{3}{4}$. 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. Вычислите: $\left(\sin^{4}\alpha+\cos^{4}\alpha\right)$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1) 0,125. 2) 0,375. 3) 0,625. 4) 0,875.

18. Решите выражение: $\sin^{6}\frac{\pi}{8}+\cos^{6}\frac{9\pi}{8}$. 1) 5/8. 2) 3/4. 3) 2/3. 4) 0,5.