Тема 14. Тригонометрия

Часть 3

Содержание

117. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

Изучение этой темы потребует от Вас тщательного изучения теории.

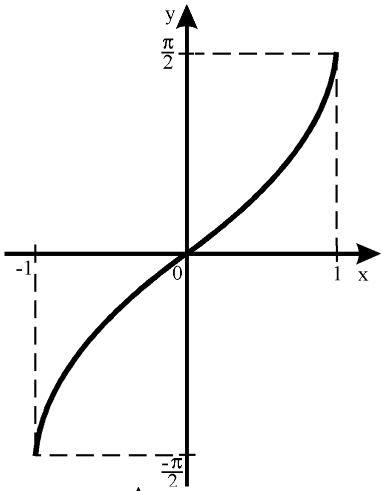
Функция, обратная синусу.

Функцию, обратную функции y = sin x, называют *арксинусом* и обозначают y = arcsin x.

Арксинусом числа ***a***, $a \in [-1; 1]$ называют угол, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу ***a***; его обозначают arcsin ***a***.

Таким образом, arcsin ***a*** есть угол, удовлетворяющий условиям:

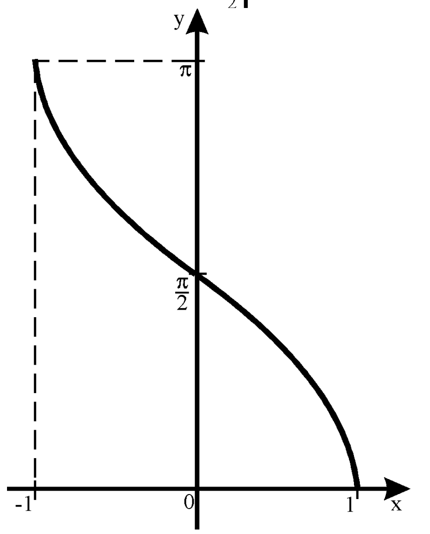
$$\sin(\arcsin a) = a, \quad |a| \le 1; \quad -\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}.$$



Функция y = arcsin x определена на отрезке [-1; 1], областью ее значений является отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На отрезке [-1; 1] функция y = arcsin x непрерывна и монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Наибольшее значение функция принимает при x = 1: $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, а наименьшее – при x = –1: $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$. При x = 0 функция равна нулю.

Отметим, что arcsin(–x) = –arcsin x. График функции y = arcsin x изображен на рисунке.

Функция, обратная косинусу.



Функцию, обратную функции y = cos x, называют *арккосинусом* и обозначают y = arccos x. Арккосинусом числа ***a***, $|a| \le 1$, называют угол, принадлежащий отрезку $[0; \pi]$, косинус которого равен числу ***a***; его обозначают arccos ***a***. Таким образом, arccos***a*** есть угол, удовлетворяющий условиям:

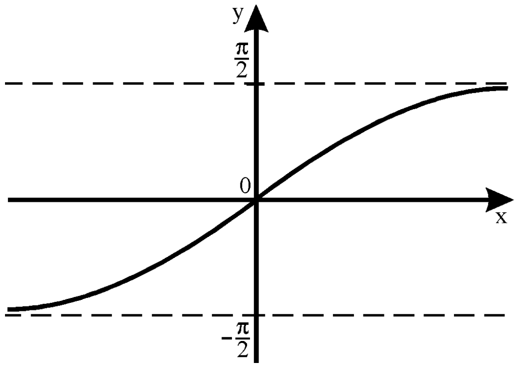
$$\cos(\arccos a) = a, \quad |a| \le 1; \quad 0 \le \arccos a \le \pi.$$

Отметим, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Функция y = arccos x определена на отрезке [-1; 1], областью ее значений является отрезок $[0; \pi]$. На отрезке [-1; 1] функция y = arccosx непрерывна и монотонно убывает от π до 0. На концах отрезка она достигает экстремальных значений: $\arccos(-1) = \pi; \quad \arccos 1 = 0$.

График функции y = arccos x показан на рисунке и он симметричен графику функции y = cos x относительно прямой y = x.

Функция, обратная тангенсу.



Функцию, обратную тангенсу, называют *арктангенсом* и обозначают y = arctg x.

Арктангенсом числа ***a*** называют угол из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен ***a***: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a; \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}.$

Любому числу x всегда соответствует единственное значение функции y = arctgx.

Очевидно: $D(\operatorname{arctg} x) = (-\infty; +\infty), \quad E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция y = arctg x является возрастающей.

Отметим, что arctg(–x) = - arctg x.

График функции y = arctg x проходит через начало координат и изображен на рисунке.

Функция, обратная котангенсу.

Функцию, обратную котангенсу, называют *арккотангенсом* и обозначают y = arcctg x.

Арккотангенсом числа ***a*** называют угол, принадлежащий интервалу $(0;\pi)$, котангенс которого равен ***a***: $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,a)=a;\quad 0<\mathrm{arcctg}\,a<\pi.$ Для арккотангенса $D(\mathrm{arcctg}x)=(-\infty;+\infty),\quad E(\mathrm{arcctg}x)=(0;\pi)$.

Арккотангенс является убывающей функцией. Отметим, что $\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}x$. График функции y = arcctg x **НЕ** пересекает ось Ox, так как y > 0 при всех $x\in R$; $\quad y=\mathrm{arcctg}0=\dfrac{\pi}{2}$.

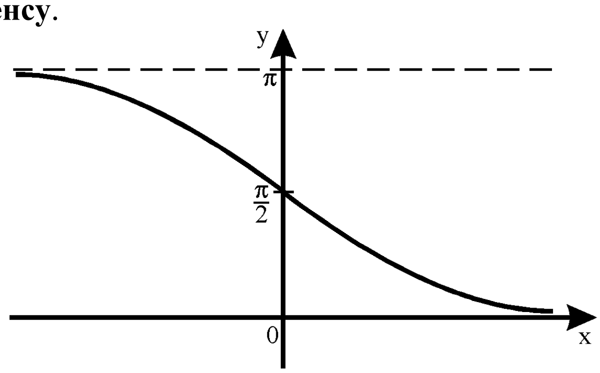


График функции y = arcctg x изображен на рисунке.

Определения символов arcsin ***a***, arccos ***a***, arctg ***a***, arcctg ***a*** сведем в таблицу.

$\alpha=\arcsin a$	$\alpha=\arccos a$	$\alpha=\mathrm{arctg}\,a$	$\alpha=\mathrm{arcctg}\,a$
1) $\sin\alpha=a$, 2) $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$	1) $\cos\alpha=a$, 2) $0\le\alpha\le\pi$	1) $\mathrm{tg}\,\alpha=a$, 2) $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$	1) $\mathrm{ctg}\,\alpha=a$, 2) $0<\alpha<\pi$

Верны следующие равенства:

$$\arcsin(-a)=-\arcsin a,\quad |a|\le 1;\qquad \arccos(-a)=\pi-\arccos a,\quad |a|\le 1;$$

$$\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2},\quad |a|\le 1;\qquad \mathrm{arctg}(-a)=-\mathrm{arctg}a,$$

$$\mathrm{arcctg}(-a)=\pi-\mathrm{arcctg}a,\qquad \mathrm{arctg}a+\mathrm{arcctg}a=\frac{\pi}{2},$$

Думаю что, прочитав теорию, Вы находитесь в лёгком шоке. Разберём примеры.

ПРИМЕР. Вычислить $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Вычисляя арккосинус табличный величины, надо вспомнить, косинус какого угла равен $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Очевидно, что это угол 45^0. Значит, $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

ПРИМЕР. Вычислить $\arcsin\dfrac{1}{2}$.

Вспоминаем, что $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$. Значит, $\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$.

ПРИМЕР. Вычислить $\mathrm{arctg}\sqrt{3}$.

Вспоминаем, что $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. Значит, $\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$.

ПРИМЕР. Вычислить $\mathrm{arcctg}\sqrt{3}$.

Вспоминаем, что $\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$. Значит, $\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{6}$.

Теперь рассмотрим примеры, в которых придётся использовать знания из теории.

ПРИМЕР. Вычислить $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Учтём, что $\arcsin(-a)=-\arcsin a,\quad |a|\le 1;\quad \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$.

ПРИМЕР. Вычислить $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Учтём, что $\arccos(-a)=\pi-\arccos a,\quad |a|\le 1;\qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

ПРИМЕР. Вычислить $\operatorname{arctg}(-1)$.

Учтём, что $\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg}a,\qquad \operatorname{arctg}(-1)=-\operatorname{arctg}1=-\frac{\pi}{4}$.

ПРИМЕР. Вычислить $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Учтём, что $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg}a,\qquad \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\pi-\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

ПРИМЕР. Вычислить $\cos(8\cdot\operatorname{arctg}1-\arccos(-0{,}5))$.

Так как $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, $\arccos(-0{,}5)=\frac{2\pi}{3}$, то

$\cos(8\cdot\operatorname{arctg}1-\arccos(-0{,}5))=\cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}=-0{,}5$. Ответ: -0,5.

ПРИМЕР. Вычислить $\cos\left(240\cdot\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Поскольку $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, то $\cos\left(240\cdot\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cos\left(240\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{240\pi}{6}=\cos 40\pi=1$. Ответ: 1.

ПРИМЕР. Вычислить $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\cos\left(-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Ответ: 1/2.

ПРИМЕР. Вычислить $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Обозначим $\arccos\frac{3}{5}=x$, тогда $\cos x=\frac{3}{5},\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$,

$\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x=2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\cdot\frac{3}{5}=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$.

Мы учли, что $\sin x=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$ Ответ: 24/25.

ПРИМЕР. Вычислить $\cos\left(2\cdot\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

Обозначим $\arcsin\frac{2}{3}=x$, тогда $\sin x=\frac{2}{3},\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$,

Используя формулу для косинуса двойного угла $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, получаем:

$\cos\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)=1-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$. Ответ: 1/9.

ПРИМЕР. Вычислить $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Так как $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$, то, используя формулы приведения, определения котангенса и арксинуса, зависимость между синусом и косинусом, находим:

$$ctg\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=ctg\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)=-ctg\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=-\frac{\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)}{\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)}=-\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}=-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{8}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Мы учли, что $\arccos\frac{1}{3}=x$, тогда $\cos x=\frac{1}{3}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$, а $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

ПРИМЕР. Вычислить $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

Обозначаем $\arcsin\frac{2}{3}=\alpha$. Эта запись означает, что $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

Найдем значение $\cos\alpha$. $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Так как в первой четверти косинус положителен, то $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Отсюда находим: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{3}:\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Следовательно, $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)=\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Ответ: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

ПРИМЕР. Найти значение угла (в градусах) $\arcsin(\cos 500^o)$.

Используя периодичность функции косинус, формулы приведения и формулу $\arcsin(-a)=-\arcsin a$, $|a|\le 1$, находим:

$$\arcsin(\cos 500^o)=\arcsin\left[\cos(360^o+140^o)\right]=\arcsin(\cos 140^o)=\arcsin\left[\cos(90^o+50^o)\right]=\arcsin(-\sin 50^o)=$$
$$=-\arcsin(\sin 50^o)=-50^o.$$

Искомый угол равен -50^0. Ответ: -50^0.

ПРИМЕР. Вычислить $\arcsin\left(\cos\frac{33}{5}\pi\right)$.

Так как $\cos\frac{33}{5}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{3}{5}\pi\right)=\cos\frac{3}{5}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{5}\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)=-\sin\frac{\pi}{10}$,

то, использовав равенство arcsin(-a) = -arcsin a, получим:

$$\arcsin\left(\cos\frac{33}{5}\pi\right)=\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right]=\arcsin\left[-\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]=-\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\pi}{10}.$$

Следовательно, $\arcsin\left(\cos\frac{33}{5}\pi\right)=-\frac{\pi}{10}$. Ответ: $-\frac{\pi}{10}$

ПРИМЕР. Найти сумму корней уравнения $\arcsin\left(2x^2+x-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$.

В данном случае $-1\le 2x^2+x-\frac{1}{2}\le 1$. Уравнение равносильно уравнению:

$2x^2+x-\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, $2x^2+x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $2x^2+x-1=0$. Корнями квадратного уравнения являются числа: $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$. Сумма корней исходного уравнения равна –0,5. Ответ: -0,5.

ТЕСТ 1.

1. Вычислите: $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}1$. 1) π 2) $\frac{5\pi}{6}$ 3) $\frac{3\pi}{4}$ 4) 2π

2. Вычислите: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}130^o)$. 1) -130^0. 2) -50^0. 3) 50^0. 4) 130^0.

3. Значение угла $\arcsin(\cos 490^o)$ (в градусах) равно: 1) 130^0. 2) 40^0. 3) -40^0. 4) 490^0.

4. Вычислите $\arcsin(\sin(-572^o))$. 1) 16^0. 2) 32^0. 3) 20^0. 4) 15^0.

5. Укажите в градусах значение угла $\arcsin(\cos(-315^o))$. 1) 45^0. 2) -45^0. 3) 135^0. 4) -135^0.

6. Вычислите: $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right)$. 1) -1. 2) 0. 3) 1. 4) не существует.

7. Решите выражение: $\sin\left(200\cdot\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 3) 0,5. 4) -0,5.

8. Сумма корней (или корень, если он один) уравнения равна: $\arcsin(2x^2+3x-8)=\frac{\pi}{2}$.

1) -1,5. 2) -3. 3) 1,5. 4) 2.

9. Значение у равно $y=\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$. 1) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4) 0,5.

10. Значение у равно $y=\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$. 1) -4/5. 2) -4/3. 3) 7/5. 4) 6.

11. Решите выражение: $\sin(\operatorname{arcctg}(-\sqrt{8}))$. 1) -1/3. 2) 1/3. 3) $\frac{\sqrt{8}}{3}$. 4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

12. Решите выражение: $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$. 1) 24/25. 2) 1/5. 3) 2/5. 4) 21/25.

13. Вычислите: $\sin(2{,}5\pi+\operatorname{arctg}(0{,}75))$. 1) -3/4. 2) 4/5. 3) 14/15 4) 120/119.

14. Решите выражение: $\operatorname{tg}\left(2\cdot\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)+3\pi\right)$. 1) $\frac{\sqrt{5}}{20}$. 2) $-\frac{\sqrt{5}}{25}$. 3) -8,944. 4) $-4\sqrt{5}$.

15. Решите выражение: $\sin(6\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\arccos 0{,}6)$. 1) -3/5. 2) 3/5. 3) 4/5. 4) -4/5.

16. Решите выражение: $\operatorname{ctg}(4\cdot\arccos 0+2\cdot\operatorname{arctg}2)$. 1) -3/4. 2) 3/4. 3) 4/3. 4) -4/3.

17. Значение равно $\sin(6\cdot\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})+4\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{5})$. 1) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$. 2) 1/9. 3) -1/9. 4) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

18. Вычислите значение выражения $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$. 1) 23/15. 2) 37/25. 3) 44/25. 4) 2,5.

118. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ.

Решение тригонометрического уравнения заключается в нахождении неизвестных углов, удовлетворяющих условию уравнения.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\sin x = 1$.

Кроме угла 90^0 этому условию удовлетворяют углы 450^0, 810^0…, т.е. углы, большие или меньшие угла 90^0 на 360^0, 720^0 и т.д. Поэтому, решением уравнения в радианах являются углы:

$$\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi=\frac{5\pi}{2};\frac{\pi}{2}+4\cdot\pi=\frac{9\pi}{2};\frac{\pi}{2}-2\cdot\pi=-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}-4\cdot\pi=-\frac{7\pi}{2}....$$

Т.е. корнями уравнения являются угол $\frac{\pi}{2}$ и углы, отличающиеся от него на $2\cdot\pi\cdot n$, где n – целое число (множество целых чисел обозначается Z). Чтобы не записывать в ответе бесконечное число корней, применяют сокращённую запись $x=\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi\cdot n;\ n\in Z$.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\sin x = -1$.

Этому условию удовлетворяют углы

$$-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi=\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}+4\cdot\pi=\frac{7\pi}{2};-\frac{\pi}{2}-2\cdot\pi=-\frac{5\pi}{2};-\frac{\pi}{2}-4\cdot\pi=-\frac{9\pi}{2}....$$

Т.е. корнями уравнения являются угол $-\frac{\pi}{2}$ и углы, отличающиеся от него на $2\cdot\pi\cdot n$, где n – целое число (множество целых чисел обозначается Z). Чтобы не записывать в ответе бесконечное число корней, применяют сокращённую запись $x=-\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi\cdot n;\ n\in Z$.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\sin x = 0$.

Этому условию удовлетворяют углы $0;0+\pi=\pi;0+2\cdot\pi=2\cdot\pi;0-2\cdot\pi=-2\cdot\pi;0-4\cdot\pi=-4\cdot\pi....$

Т.е. корнями уравнения являются угол 0 и углы, отличающиеся от него на $\pi\cdot n$, где n – целое число (множество целых чисел обозначается Z). Чтобы не записывать в ответе бесконечное число корней, применяют сокращённую запись $x=\pi\cdot n;\ n\in Z$.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\cos x = 1$.

Этому условию удовлетворяют углы $0;0+2\cdot\pi=2\cdot\pi;0+4\cdot\pi=4\cdot\pi;0-2\cdot\pi=-2\cdot\pi;0-4\cdot\pi=-4\cdot\pi....$

Т.е. корнями уравнения являются угол 0 и углы, отличающиеся от него на $2\cdot\pi\cdot n$, где n – целое число (множество целых чисел обозначается Z). Чтобы не записывать в ответе бесконечное число корней, применяют сокращённую запись $x=2\cdot\pi\cdot n;\ n\in Z$.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\cos x = -1$.

Этому условию удовлетворяют углы $\pi;\pi+2\cdot\pi=3\cdot\pi;\pi+4\cdot\pi=5\cdot\pi;\pi-2\cdot\pi=-\pi;\pi-4\cdot\pi=-3\cdot\pi....$

Т.е. корнями уравнения являются угол π и углы, отличающиеся от него на $2\cdot\pi\cdot n$, где n – целое число (множество целых чисел обозначается Z). Чтобы не записывать в ответе бесконечное число корней, применяют сокращённую запись $x=\pi+2\cdot\pi\cdot n;\ n\in Z$.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\cos x = 0$.

Этому условию удовлетворяют углы $\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi=\frac{5\pi}{2};\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}-2\cdot\pi=-\frac{3\pi}{2}....$

Т.е. корнями уравнения являются угол $\frac{\pi}{2}$ и углы, отличающиеся от него на $\pi\cdot n$, где n – целое число (множество целых чисел обозначается Z). Чтобы не записывать в ответе бесконечное число корней, применяют сокращённую запись $x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n;\ n\in Z$.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\mathrm{tg}x = 0$.

Очевидно, что это равенство справедливо, если $\sin x = 0$. Ответ: $x=\pi\cdot n;\ n\in Z$.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\mathrm{ctg}x = 0$.

Очевидно, что это равенство справедливо, если $\cos x = 0$. Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n;\ n\in Z$.

Мы рассмотрели частные случаи решения тригонометрических уравнений. Вам обязательно надо запомнить эти решения.

Усложним уравнения.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\sin 2x = 1$.

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\cdot\pi\cdot n;\ n \in Z. \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{4} + \pi\cdot n;\ n \in Z$$

ПРИМЕР. Решим уравнение $\sin\frac{x}{3} = -1$.

$$\frac{x}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\cdot\pi\cdot n;\ n \in Z. \Rightarrow\ x = -\frac{3\pi}{2} + 6\cdot\pi\cdot n;\ n \in Z$$

ПРИМЕР. Решим уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

$$x + \frac{\pi}{6} = \pi\cdot n;\ n \in Z. \Rightarrow\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi\cdot n;\ n \in Z$$

ПРИМЕР. Решим уравнение $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

$$3x - \frac{\pi}{4} = 2\cdot\pi\cdot n;\ n \in Z. \Rightarrow\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\cdot\pi\cdot n;\ n \in Z\ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\cdot\pi\cdot n}{3};\ n \in Z$$

ПРИМЕР. Решим уравнение $\cos x = -1$ и найдём корни на промежутке $x \in \left[-2\pi; \frac{2\pi}{3}\right]$.

В такой формулировке чаще всего встречаются тригонометрические уравнения на экзаменах.
Сначала просто решим уравнение $x = \pi + 2\cdot\pi\cdot n;\ n \in Z$.
Теперь решим двойное неравенство для нахождения корней, которые удовлетворяют условию

$$-2\pi \le \pi + 2\cdot\pi\cdot n \le \frac{2\pi}{3}. \Rightarrow\ -2 \le 1 + 2\cdot n \le \frac{2}{3}\ \Rightarrow\ -3 \le 2\cdot n \le -\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \frac{-3}{2} \le n \le -\frac{1}{6}$$

Т.к. n может быть только целым числом, то единственное целое число, удовлетворяющее этому условию, равно -1. Значит, существует единственный корень уравнения, который мы найдём, подставляя вместо n число -1 в равенство $x = \pi + 2\cdot\pi\cdot n$. Получаем, что корнем уравнения является $x = -\pi$.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\cos 4x = 0$ и найдём корни на промежутке $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right]$.

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi\cdot n;\ n \in Z. \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\cdot n}{4};\ n \in Z$$

Теперь решим двойное неравенство для нахождения корней, которые удовлетворяют условию

$$-\pi \le \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\cdot n}{4} \le \frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ -1 \le \frac{1}{8} + \frac{n}{4} \le \frac{1}{6}\ \Rightarrow\ -\frac{9}{8} \le \frac{n}{4} \le \frac{1}{24}\ \Rightarrow\ -\frac{9}{2} \le n \le \frac{1}{6}$$

Т.к. n может быть только целым числом, то целыми числами, удовлетворяющими этому условию, являются: -4; -3; -2; -1; 0. Значит, в уравнении 5 корней, которые мы найдём, подставляя в равенство $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\cdot n}{4}$ числа -4; -3; -2; -1; 0. Получаем, что $x_1 = -\frac{7\pi}{8}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{8}$, $x_3 = -\frac{3\pi}{8}$, $x_4 = -\frac{\pi}{8}$, $x_5 = \frac{\pi}{8}$.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ и найдём количество корней на промежутке $x \in \left[-20^0; 140^0\right]$.

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pi\cdot n;\ n \in Z\ \Rightarrow\ 2x = \frac{\pi}{4} + \pi\cdot n;\ n \in Z\ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\cdot n}{2};\ n \in Z$$

Теперь решим двойное неравенство для нахождения корней, которые удовлетворяют условию

$$-20^0 \le \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\cdot n}{2} \le 140^0$$

Для решения неравенства переведём углы, указанные в градусах, в радианы (можно было поступить и наоборот – перевести радианы в градусы).

$$-\frac{\pi}{9} \le \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\cdot n}{2} \le \frac{7\pi}{9}\ \Rightarrow\ -\frac{1}{9} \le \frac{1}{8} + \frac{n}{2} \le \frac{7}{9}\ \Rightarrow\ -\frac{17}{72} \le \frac{n}{2} \le \frac{47}{72}\ \Rightarrow\ -\frac{17}{36} \le n \le \frac{47}{36}$$

Т.к. n может быть только целым числом, то этому условию удовлетворяют: 0; 1.

В условии просят найти количество корней, но не просят указать корни, поэтому ответ: в уравнении 2 корня.

ПРИМЕР. Решим уравнение $\operatorname{ctg}\left(3x-60^0\right)=0$ и найдём количество корней на промежутке $x\in\left[-30^0;120^0\right]$.

$$3x-60^0=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n;\ n\in Z.\Rightarrow\ x=20^0+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi\cdot n}{3};\ n\in Z\ \Rightarrow\ x=50^0+60^0\cdot n;\ n\in Z$$

Теперь решим двойное неравенство для нахождения корней, которые удовлетворяют условию

$$-30^0\le 50^0+60^0\cdot n\le 120^0\ \Rightarrow\ -80^0\le 60^0\cdot n\le 70^0\ \Rightarrow\ -\frac{4}{3}\le n\le\frac{7}{6}$$

Т.к. n может быть только целым числом, то целыми числами, удовлетворяющими этому условию, являются: -1; 0; 1. В условии просят найти количество корней, но не просят указать корни, поэтому ответ такой: в уравнении 3 корня.

ПРИМЕР. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\sin(\pi(x-2))=0$, $0<x<4$.

Обратите внимание, что в условии уравнения нет значка градусов. Следовательно, углы указаны в радианах.

$$\pi(x-2)=\pi k,\ k\in Z\ \Rightarrow\ x-2=k,\ k\in Z\ \Rightarrow\ x=2+k,\ k\in Z$$

Из условия $0<x<4$ следует, что $0<2+k<4$, т.е. $-2<k<2,\ k\in Z$.

Таким образом, при $k=-1;\ 0;\ 1$ получаем $x=1;\ 2;\ 3$. *Ответ:* 1; 2; 3.

ТЕСТ 1.

1. Решить уравнение $\cos x=-1$.

1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$ 2) $\pi+2\pi k,\quad k\in Z$. 3) $2\pi k,\quad k\in Z$. 4) $\pi k,\quad k\in Z$.

2. Решить уравнение $\sin x=0$.

1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$ 2) $\pi+2\pi k,\quad k\in Z$. 3) $\pi k,\quad k\in Z$. 4) $2\pi k,\quad k\in Z$.

3. Решить уравнение $\sin x=1$.

1) $2\pi k,\quad k\in Z$. 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$. 3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$ 4) $\pi+2\pi k,\quad k\in Z$.

4. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x=0$.

1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$ 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z$. 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$ 4) $\pi+2\pi k,\quad k\in Z$.

5. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\cos\frac{2x}{5}=0,\quad 180^o<x<270^o$.

1) 210^0. 2) 225^0. 3) 240^0. 4) 265^0.

6. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\sin\frac{3x}{2}=-1,\quad 0^o<x<270^o$.

1) 45^0. 2) 135^0. 3) 180^0. 4) 225^0.

7. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\cos 9x=1,\quad 0^o<x<45^o$.

1) 18^0. 2) 25^0. 3) 30^0. 4) 40^0.

8. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\sin\left(\pi\left(x-2\right)\right)=0,\quad 0<x<4$.

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 1, 2, 3.

9. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\operatorname{tg}(\pi(x-4))=0,\quad 3<x<6$.

1) 4. 2) 5. 3) 4, 5. 4) нет решений.

10. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(x-2\right)\right)=0,\quad 2<x<7$.

1) 3, 4 2) 3, 5. 3) 4, 5. 4) 4, 6.

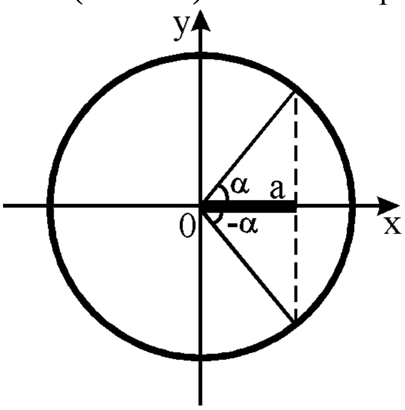
119. ПРОСТЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.

При решении уравнений вида cos x = a, возможно три случая.

1. Частные случаи cos x = 0, cos x = 1, cos x = -1, которые мы рассмотрели в прошлом параграфе.

2. Если a больше 1 или меньше -1 в уравнении cos x = a, то корней нет, т.к. $|\cos x| \le 1$.

Например: cos x = 1,2 – нет корней,
cos 3x = -2 – нет корней,
cos (2x + 30^0) = π – нет корней и т.д.



3. Если a лежит в пределах от -1 до 1 в уравнении cos x = a, то решения уравнения можно показать на чертеже.

Очевидно, что одним из решений является угол, равный $\alpha = \arccos a$, а также углы, отличающиеся от угла α на 360^0, 720^0 и т.д.

Другим решением является угол, равный $\alpha = -\arccos a$, а также углы, отличающиеся от него на 360^0, 720^0 и т.д.

Запишем решение уравнения cos x = a в общем виде:

$$x = \pm \arccos a + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z.$$

Пример. Найти решение уравнения в указанном промежутке $\cos 2x = 1/2$, $0^0 < x < 180^0$.

$$2x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 360^0 k,\ k \in Z$$

$$2x = \pm 60^0 + 360^0 k,\ k \in Z, \quad \text{или} \quad x = \pm 30^0 + 180^0 k,\ k \in Z.$$

Обязательно перепишите последнее выражение в виде двух равенств

$$x = 30^0 + 180^0 k,\ k \in Z \text{ или } x = -30^0 + 180^0 k,\ k \in Z.$$

Теперь, по очереди, отбираем корни в каждом из решений.

Кстати, если Вам не нужно оформлять работу, например на тестировании, можно отбирать корни, не решая двойное неравенство.

Отберём корни с помощью рассуждения. В первом решении $x = 30^0 + 180^0 k,\ k \in Z$ при k = 0 x = 30^0, и этот корень входит в указанный в условии промежуток. Остальные корни отличаются от этого корня на 180^0, 360^0 и т.д.

Корень x = 210^0 (получается при k = 1) не входит в указанный в условии промежуток, поэтому проверять ещё большие корни не имеет смысла.

Корень x = -150^0 (получается при k = -1) не входит в указанный в условии промежуток, поэтому проверять ещё меньшие корни не имеет смысла.

Во втором решении $x = -30^0 + 180^0 k,\ k \in Z.$ при k = 0 x = -30^0, и этот корень не входит в указанный в условии промежуток. Остальные корни отличаются от этого корня на 180^0, 360^0 и т.д.

Корень x = 150^0 (получается при k = 1) входит в указанный в условии промежуток, поэтому стоит проверить ещё большие корни.

Корень x = 330^0 (получается при k = 2) не входит в указанный в условии промежуток, поэтому проверять ещё большие корни не имеет смысла.

Корень x = -210^0 (получается при k = -1) не входит в указанный в условии промежуток, поэтому проверять ещё меньшие корни не имеет смысла.

Ответ: 30^0 и 150^0.

В случае, если число a отрицательно, то воспользуемся формулой $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

ПРИМЕР. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\sqrt{3} + 2\cos\frac{\pi x}{9} = 0$, $8 < x < 20$

$$\cos\frac{\pi x}{9} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{9} = \pm\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + 2\pi n,\ n \in Z \Rightarrow \frac{\pi x}{9} = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$$

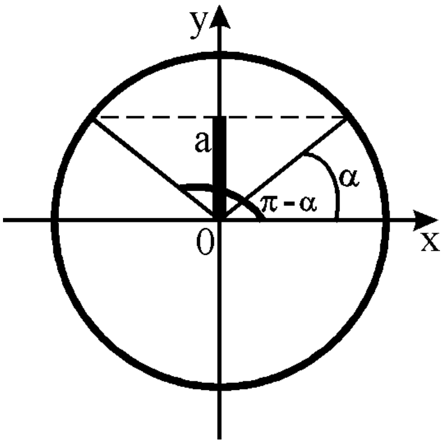
$$\frac{\pi x}{9} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = \pm 7{,}5 + 18n,\ n \in Z$$

$$x = 7{,}5 + 18n,\ n \in Z \text{ или } x = -7{,}5 + 18n,\ n \in Z$$

Условию $8 < x < 20$ удовлетворяет только значение *x*=10,5 при $n = 1$ во втором уравнении. *Ответ:* 10,5.

При решении уравнений вида sin x = a, возможно три случая.
1. Частные случаи sin x = 0, sin x = 1, sin x = -1, которые мы рассмотрели в прошлом параграфе.
2. Если a больше 1 или меньше -1 в уравнении sin x = a, то корней нет, т.к. $|\sin x| \le 1$.

Например: sin x = 2 – нет корней,
sin 2x = -1,5 – нет корней,
sin (5x - 45^0) = 2π – нет корней и т.д.



3. Если a лежит в пределах от -1 до 1 в уравнении sin x = a, то решения уравнения можно показать на чертеже.
Очевидно, что одним из решений является угол, равный $\alpha = \arcsin a$, а также углы, отличающиеся от угла α на 360^0, 720^0 и т.д.
Другим решением является угол, равный $\alpha = \pi - \arcsin a$, а также углы, отличающиеся от него на 360^0, 720^0 и т.д.
Запишем решение уравнения sin x = a в общем виде: $x_1 = \arcsin a + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z$,

$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z.$$

Вспомним, что при отрицательном значении числа a воспользуемся формулой arcsin(–a) = – arcsin a.

ПРИМЕР. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\sin\frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 270^o < x < 360^o$.

$$\frac{3x_1}{2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z \Rightarrow \frac{3x_1}{2} = \frac{\pi}{3} + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z$$

$$x_1 = \frac{2\cdot\pi}{9} + \frac{4\cdot\pi\cdot k}{3},\ k \in Z \Rightarrow x_1 = 40^0 + 240^0\cdot k,\ k \in Z$$

На указанном промежутке $270^o < x < 360^o$ есть решение 280^0.
Теперь второй случай.

$$\frac{3x_2}{2} = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z \Rightarrow \frac{3x_2}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z$$

$$\frac{3x_2}{2} = \frac{2\cdot\pi}{3} + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z \Rightarrow x_2 = \frac{4\cdot\pi}{9} + \frac{4\cdot\pi\cdot k}{3},\ k \in Z$$

На указанном промежутке $270^o < x < 360^o$ есть решение 320^0.
Ответ: 280^0; 320^0.

ПРИМЕР. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\sin 2x = -1/2, \quad 0^o < x < 180^o$.

$$2\cdot x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z, \Rightarrow 2\cdot x_1 = -\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z$$

$$2\cdot x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{12} + \pi\cdot k,\ k \in Z$$

На указанном промежутке $0^o < x < 180^o$ есть решение 165^0.
Теперь второй случай.

$$2\cdot x_2 = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z \Rightarrow 2\cdot x_2 = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z$$

$$2\cdot x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z \Rightarrow 2\cdot x_2 = \frac{7\cdot\pi}{6} + 2\cdot\pi\cdot k,\ k \in Z \Rightarrow x_2 = \frac{7\cdot\pi}{12} + \pi\cdot k,\ k \in Z$$

На указанном промежутке $0^o < x < 180^o$ есть решение 105^0. Ответ: 105^0; 165^0.

Замечание. Решение уравнения sin x = a может быть записано в виде

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi\cdot k,\ k \in Z.$$

ПРИМЕР. Ещё раз найдём решение уравнения на указанном промежутке $\sin\frac{3x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 270^{o} < x < 360^{o}$.

$$\frac{3x}{2} = (-1)^k \cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi \cdot k,\ k \in Z \Rightarrow \frac{3x}{2} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi \cdot k,\ k \in Z$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{9} + \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{3},\ k \in Z \Rightarrow x = (-1)^k \cdot 40^0 + 120^0 \cdot k,\ k \in Z.$$

Теперь произведём отбор корней.
Пусть k = 0, тогда x = 40^0. Пусть k = 1, тогда x = 80^0. Пусть k = 2, тогда x = 280^0.
Пусть k = 3, тогда x = 320^0. Пусть k = 4, тогда x = 520^0 и т.д. Очевидно, что корни уравнения при таком решении совпадают с корнями, найденными первым способом.

При решении уравнений вида tg x = a и ctg x = a проблем гораздо меньше.

$$\text{tg } x = a \Rightarrow x = \text{arctg}a + \pi \cdot k,\ k \in Z$$

$$\text{ctg } x = a \Rightarrow x = \text{arcctg}a + \pi \cdot k,\ k \in Z$$

Сразу же вспомним, что arctg(–x) = - arctg x; arcctg(–x) = π-arcctg x.

ПРИМЕР. Решить уравнение $\text{tg}x = -1/\sqrt{3}$.

$$x = \text{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 180^0 k,\ k \in Z \Rightarrow x = -\text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 180^0 k,\ k \in Z \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \pi \cdot k,\ k \in Z$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$.

ПРИМЕР. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\text{ctg}2x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $90^0 < x < 180^0$

$$2x = \text{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 180^0 k,\ k \in Z \Rightarrow 2x = \pi - \text{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 180^0 k,\ k \in Z \Rightarrow 2x = 120^0 + 180^0 k,\ k \in Z.$$

Отсюда $x = 60^0 + 90^0 k,\ k \in Z$. Условию $90^0 < x < 180^0$ удовлетворяет значение $x = 150^0$. *Ответ:* 150^0.

ТЕСТ 1.

1. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и найти количество корней на указанном промежутке $-\frac{2\cdot\pi}{3} \le x \le \frac{4\cdot\pi}{3}$.

1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad 2$ корня

2) $\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z;$ 4 корня

3) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad 3$ корня

4) $\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z; \quad 3$ корня.

2. Решить уравнение $\sin x = -\sqrt{3}/2$ и найти количество корней на указанном промежутке $-\frac{2\cdot\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}$.

1) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z;$ 2 корня

2) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z;$ 3 корня

3) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z;$ 2 корня.

4) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z; \quad -\frac{2\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z;$ 4 корня

3. Решить уравнение $\cos x = -\sqrt{2}/2$ и найти количество корней на указанном промежутке $-\frac{3\cdot\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$.

1) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z;$ 1 корень

2) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z;$ 2 корня

3) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z;\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;$ 2 корня.

4) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z; \quad 3$ корня

4. Решить уравнение $\cos x = \sqrt{3}/2$ и найти количество корней на указанном промежутке $-\frac{4\cdot\pi}{3} \le x \le \frac{2\cdot\pi}{3}$.

1) $\pm\frac{2\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z;$ 6 корней

2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad 2$ корня

3) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z;$ 2 корня

4) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z;$ 3 корня

5. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = -1/\sqrt{3}$ и найти количество корней на указанном промежутке $-\frac{2\cdot\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}$.

1) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad 2$ корня

2) $-\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z;$ 1 корень

3) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z;$ 2 корня

4) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z;$ 3 корня

6. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = -1$, и найти сумму корней удовлетворяющих условию $-140^\circ < x < 220^\circ$.

1) -45^0. 2) 45^0. 3) 90^0. 4) 135^0.

7. Решить уравнение и найти количество корней на указанном промежутке $\sin x = 1/2$. $-110^\circ < x < 230^\circ$.

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4.

8. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\sin 3x = 1/2, \quad 0^\circ < x < 90^\circ$.

1) $10^0; 50^0$. 2) 15^0. 3) $15^0, 75^0$. 4) $40^0; 80^0$.

9. Найти решение уравнения на указанном промежутке $\operatorname{ctg} 2x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 90^\circ < x < 180^\circ$.

1) 96^0 2) 105^0 3) 120^0 4) 150^0

10. Решить уравнение и найти количество корней на указанном промежутке.

$\sin(35^\circ + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -80^\circ < x < 0^\circ$.

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

11. Решить уравнение и указать наименьший положительный корень (в градусах)

$\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$.

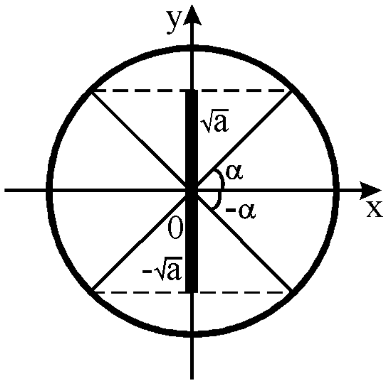
1) 10^0. 2) 20^0. 3) 30^0. 4) 40^0.

12. Найти решение уравнения на указанном промежутке $1 - 2\sin\frac{4\pi x}{3} = 0, \quad 0 < x < 1$.

1) 0,2. 2) 0,5. 3) 0,375. 4) 0,125; 0,625.

13. Найти решение уравнения на указанном промежутке $1 - \sqrt{2}\cos\frac{3\pi x}{4} = 0, \quad 2{,}5 \le x \le 4$.

1) 2,5. 2) 3. 3) 3; 4. 4) 4.



120. ПРОСТЫЕ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТАМИ И МОДУЛЯМИ.

Уравнения вида $\sin^2 x = a,\ \cos^2 x = a,\ tg^2 x = a,\ ctg^2 x = a$ имеют похожие решения.

Очевидно, что в этих уравнениях будут корни, при условии, что число а неотрицательно, и в уравнениях с синусом и косинусом не превосходит 1.

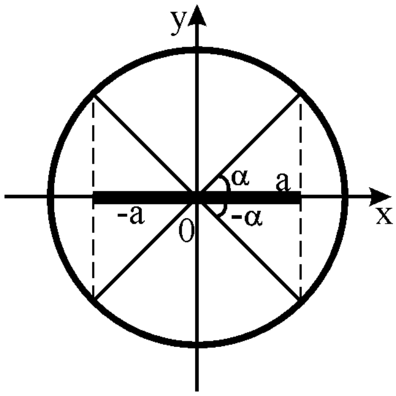
Итак, решим уравнение $\sin^2 x = a$.

Тогда, $\sin x = \sqrt{a}$ или $\sin x = -\sqrt{a}$.

Изобразим все решения на чертеже.

Очевидно, что решением уравнения $\sin^2 x = a$ является множество корней: $x = \pm \arcsin \sqrt{a} + \pi \cdot k,\ k \in Z$.

Аналогично определим, что решением уравнения $\cos^2 x = a,$ является множество корней: $x = \pm \arccos \sqrt{a} + \pi \cdot k,\ k \in Z$, решением уравнения $tg^2 x = a,$ является множество корней: $x = \pm arctg \sqrt{a} + \pi \cdot k,\ k \in Z$, решением уравнения $ctg^2 x = a,$ является множество корней: $x = \pm arcctg \sqrt{a} + \pi \cdot k,\ k \in Z$.



Решение уравнений вида $|\sin x| = a$, $|\cos x| = a$, $|tgx| = a$ и $|ctgx| = a$ очень похоже.

Итак, решим уравнение $|\sin x| = a$.

Тогда, $\sin x = a$ или $\sin x = -a$.

Очевидно, что решением уравнения $|\sin x| = a$ является множество корней: $x = \pm \arcsin a + \pi \cdot k,\ k \in Z$.

Аналогично определим, что решением уравнения $|\cos x| = a$ является множество корней: $x = \pm \arccos a + \pi \cdot k,\ k \in Z$, решением уравнения $|tgx| = a$ является множество корней: $x = \pm arctg a + \pi \cdot k,\ k \in Z$, решением уравнения $|ctgx| = a$ является множество корней: $x = \pm arcctg a + \pi \cdot k,\ k \in Z$.

ПРИМЕР. Решить уравнение $3\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$.

Из уравнения получим $3\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 1 = 0$ или $2\sin^2 x = 1$. Значит, $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, тогда $x = \pm \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}} + \pi \cdot n,\ n \in Z$. Получаем $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n,\quad n \in Z$. Ответ: $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n,\quad n \in Z$.

ТЕСТ 1.

1. Решить уравнение $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ и найти количество корней, удовлетворяющих условию $-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{4\cdot\pi}{3}$.

1) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\quad k \in Z$; 4 корня
2) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\quad k \in Z$; 4 корня
3) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\quad k \in Z$; 3 корня
4) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\quad k \in Z$; 3 корня

2. Решить уравнение $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ и найти сумму корней, удовлетворяющих условию $-240^\circ < x < 500^\circ$.

1) 0^0.
2) 420^0.
3) 480^0.
4) 1215^0.

3. Решить уравнение $tg^2 x = 1$ и найти количество корней, удовлетворяющих условию $-\frac{3\cdot\pi}{4} \le x \le \frac{2\cdot\pi}{3}$.

1) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\quad k \in Z$; 3 корня
2) $\pm\frac{\pi}{2} + \pi k,\quad k \in Z$; 2 корня
3) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\quad k \in Z$; 4 корня
4) $\pm\frac{\pi}{2} + \pi k,\quad k \in Z$; 4 корня

4. Решить уравнение $ctg^2 x = 3$ и найти количество корней, удовлетворяющих условию $-\frac{\pi}{6} \le x \le \pi$.

1) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\quad k \in Z$; 4 корня.
2) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\quad k \in Z$; 4 корня
3) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\quad k \in Z$; 3 корня
4) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\quad k \in Z$; 3 корня

5. Решить уравнение $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}x\right) - 1 = 0$ и найти сумму корней, удовлетворяющих условию $-80^\circ < x < 100^\circ$.

1) -30^0.
2) 15^0.
3) 30^0.
4) 0^0.

6. Решить уравнение: $3tg^2\left(\pi x - \frac{\pi}{8}\right) = 1,\quad \frac{3}{2} < x < 3$.

1) 2.
2) 1,5; 2
3) $1\frac{23}{24},\quad 2\frac{7}{24},\quad 2\frac{23}{24}$.
4) $1\frac{11}{24},\quad 2\frac{1}{24},\quad 2\frac{23}{24}$

7. Решить уравнение $|\sin 4x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и найти количество корней, удовлетворяющих условию $-\frac{2\cdot\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}$.

1) $\pm\frac{\pi}{12} + \pi k,\quad k \in Z;\quad \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\quad n \in Z$; 6 корней
2) $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4},\quad k \in Z$; 9 корней
3) $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\quad k \in Z$; 12 корней
4) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\quad k \in Z;\quad \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\quad n \in Z$; 12 корней

8. Решить уравнение $|\cos 2x| = 1$ и найти количество корней, удовлетворяющих условию $-\frac{2\cdot\pi}{3} \le x \le \frac{4\cdot\pi}{3}$.

1) 1 корень
2) 2 корня
3) 3 корня
4) 4 корня

9. Решить уравнение $\left|ctg\frac{2x}{3}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и найти сумму корней, удовлетворяющих условию $-\pi \le x \le \pi$.

1) $\pm\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k,\quad k \in Z;\quad 0$.
2) $\pm\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k,\quad k \in Z;\quad \frac{\pi}{2}$
3) $\pm\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi k,\quad k \in Z;\quad 0$
4) $\pm\frac{\pi}{2} + \pi k,\quad k \in Z;\quad \pi$

121. УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К КВАДРАТНЫМ.

Примеры решения уравнений.

ПРИМЕР. Решить уравнение $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

Имеем: $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \Rightarrow 2\cdot(1-\sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

Произведём замену переменных $\sin x = t$.

Получаем: $2\cdot t^2 - 5\cdot t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2; t = 0{,}5 \Rightarrow \sin x = 2; \sin x = 0{,}5$. Так как $|\sin x| \le 1$, то годится только sin x = 0,5, откуда $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad k, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad k, n \in Z$.

ПРИМЕР. Решить уравнение: $(\cos 2x - 1)\operatorname{ctg}^2 x = -3\sin x$.

Используем формулу косинуса двойного угла: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$(\cos^2 x - \sin^2 x - 1)\operatorname{ctg}^2 x = -3\sin x \Rightarrow -2\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 x = -3\sin x$$

$$2\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 x - 3\sin x = 0 \Rightarrow \sin x\cdot(2\sin x\cdot\operatorname{ctg}^2 x - 3) = 0$$

$$\sin x\cdot\left(2\sin x\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 3\right) = 0 \Rightarrow \sin x\cdot\left(\frac{2\cos^2 x}{\sin x} - 3\right) = 0 \Rightarrow \sin x\cdot\left(\frac{2\cos^2 x - 3\sin x}{\sin x}\right) = 0$$

$$2\cos^2 x - 3\sin x = 0 \Rightarrow 2(1-\sin^2 x) - 3\sin x = 0$$

Произведём замену переменных $\sin x = t$ и т.д. Ответ: $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$.

ПРИМЕР. Решить уравнение: $2\cdot\operatorname{tg}x + 2\cdot\operatorname{ctg}x = 3$.

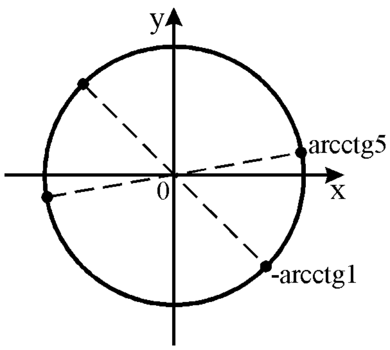
$$2\cdot\operatorname{tg}x + \frac{2}{\operatorname{tg}x} = 3$$

Произведём замену переменных $\operatorname{tg}x = t$, приведём к общему знаменателю и решим квадратное уравнение. Ответ: нет решений.

ПРИМЕР. Решить уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - 4\cdot\operatorname{ctg}x = 6$ и найти количество корней на [0^0; 360^0].

С учётом формулы $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ получаем $1 + \operatorname{ctg}^2 x - 4\cdot\operatorname{ctg}x = 6$. Тогда $\operatorname{ctg}^2 x - 4\cdot\operatorname{ctg}x - 5 = 0$. Получаем $\operatorname{ctg}x = 5$ и $\cdot\operatorname{ctg}x = -1$. Корни равнения $x_1 = \operatorname{arcctg}5 + \pi k; \quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad k, n \in Z$

Для нахождения количества корней используем «хитрый» способ. Нанесём на единичную окружность точки, соответствующие $\operatorname{ctg}x = 5$ и $\cdot\operatorname{ctg}x = -1$. С $\operatorname{ctg}x = -1$ разобраться просто. Это точки



$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$, т.е. углы -$45^0$, 135^0 и.т.д. При нанесении на окружность точек, соответствующих условию $\operatorname{ctg}x = 5$ надо понимать, что котангенс положителен в первой и третьей четвертях, а значит, мы должны нанести одну точку в первой четверти и одну точку в третьей четверти. Котангенс убывающая функция, т.е. большему значению угла соответствует меньшее значение котангенса. Например, $\operatorname{ctg}30^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}45^\circ = 1$. Значит, угол в первой четверти, соответствующий условию $\operatorname{ctg}x = 5$, меньше 30^0, ближе к нулю. А в третьей четверти это угол близок к 180^0.

Итак, на окружности 4 точки. В условии уравнения сказано, что корни должен принадлежать промежутку [0^0; 360^0]. т.е. надо сделать один оборот по тригонометрической окружности, а значит, в уравнении 4 корня.

Кстати, если бы в условии было бы сказано, что корни должны принадлежать промежутку [-360^0; 360^0], то надо сделать 2 оборота по тригонометрической окружности, а значит, в уравнении8 корней.

Обратите внимание, что при решении уравнений, содержащих tg x или ctg x, необходимо учитывать ОДЗ. В уравнениях с tg x будем учитывать, что cos x не равен нулю, а в уравнениях с ctg x будем учитывать, что sin x не равен нулю.

ПРИМЕР. Решить уравнение $tg^2\frac{x}{2}-\frac{1}{ctg\frac{x}{2}}=2\cdot tg\,x\cdot ctg\,x$ и найти корни на промежутке $[0^0;\ 360^0]$.

Сначала определим ОДЗ по исходному примеру: $\cos\frac{x}{2}\neq 0,\ \sin\frac{x}{2}\neq 0,\ \cos x\neq 0,\ \sin x\neq 0$ Решать ОДЗ не нужно. Когда мы найдём корни уравнения, мы проверим их на выполнение условий

$$\cos\frac{x}{2}\neq 0,\ \sin\frac{x}{2}\neq 0,\ \cos x\neq 0,\ \sin x\neq 0.$$

Решаем уравнение $tg^2\frac{x}{2}-tg\frac{x}{2}-2=0$ и получаем $tg\frac{x}{2}=2$ и $tg\frac{x}{2}=-1$. Тогда $\frac{x}{2}=arctg2+\pi\cdot k$ и $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi\cdot n\quad k,n\in Z$. Значит, $x=2\cdot arctg2+2\cdot\pi\cdot k$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\cdot\pi\cdot n\quad k,n\in Z$.

На промежутке $[0^0;\ 360^0]$ получаем корни $x_1=2\cdot arctg2,\quad x_2=\frac{\pi}{2}$. Но корень $x_2=\frac{\pi}{2}$ не удовлетворяет условию $\cos x\neq 0$. Ответ: $x=2\cdot arctg2$

ТЕСТ 1.

1. Решить уравнение $2\sin^2 x+\sin x-1=0$ и найти количество корней на промежутке $\left[0;\frac{3\cdot\pi}{2}\right]$.

1) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\quad \frac{\pi}{6}+\pi n;\quad \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\quad k,n,m\in Z;$ 5 корней.

2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k;\quad \frac{\pi}{3}+2\pi n;\quad \frac{5\pi}{6}+\pi m,\quad k,n,m\in Z;$ 4 корня.

3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\quad \frac{\pi}{6}+2\pi n;\quad \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\quad k,n,m\in Z;$ 3 корня.

4) $\frac{\pi}{2}+\pi k;\quad \frac{\pi}{6}+\pi n;\quad \frac{5\pi}{6}+\pi m,\quad k,n,m\in Z;$ 6 корней.

2. Решить уравнение $\cos^2 x-\sin x-1=0$ и найти количество корней на промежутке $\left[0;\frac{3\cdot\pi}{2}\right]$.

1) $\frac{\pi k}{2};\quad k\in Z;$ 3 корня. 2) $\pi k;\quad -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad k,n\in Z;$ 3 корня.

3) $2\pi k;\quad \frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad k,n\in Z;$ 2 корня. 4) $\pi k;\quad \frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad k,n\in Z;$ 2 корня.

3. Решить уравнение $4\sin^2 x-4\cos x-1=0$ и найти количество корней на промежутке $[0;3\cdot\pi]$.

1) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z;$ 2 корня 2) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z;$ 2 корня

3) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z;$ 3 корня. 4) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in Z;$ 4 корня

4. Решить уравнение $\sqrt{2}\cdot\sin x+ctg\,x=0$ и найти сумму корней на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\cdot\pi}{2}\right]$.

1) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z;\ 2\pi$. 2) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z;\ \frac{3\pi}{4}$ 3) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z;\ \pi$ 4) $\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z;\ \pi$

5. Решить уравнение $\cos 6x+6\cos^2 3x=1$ и найти сумму корней, удовлетворяющих условию $-90^o<x<120^o$. 1) 100^0. 2) 105^0. 3) 110^0. 4) 115^0.

6. Решить уравнение $tg\,x+3\cdot ctg\,x=4$ и найти количество корней на $[0^0;\ 360^0]$.

1) $x_1=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad x_2=arctg3+2\pi n;$ 3 корня 2) $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad x_2=arctg3+\pi n;$ 4 корня.

3) $x_1=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\quad x_2=arctg3+2\pi n;$ 2 корня 4) $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad x_2=-arctg3+\pi n;$ 4 корня

122. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ И ДРУГИЕ НЕСЛОЖНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Примеры решений уравнений.

ПРИМЕР. Решить уравнение. $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$.

$$\sin x \cos x = 1 - \cos^2 x$$
$$\sin x \cos x = \sin^2 x$$
$$\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$$
$$\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0$$
$$\sin x = 0 \text{ или } \cos x - \sin x = 0$$

ПРИМЕР. Решим уравнение $\cos x - \sin x = 0$.

$$\sin x = \cos x$$

Разделим на cos x левую и правую части уравнения и получим: $\operatorname{tg} x = 1$. Ответ: πk; $\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad k, n \in Z$

Обратите внимание, что деление обеих частей уравнения на cos x, $\cos^2 x$, sin x, $\sin^2 x$ – это очень удобный способ решения уравнений, позволяющий перейти от двух функций cos x и sin x к одной функции tg x.

ПРИМЕР. Решить уравнение. $5\sin^2 x = 2 - \cos^2 x$.

Вместо 2 запишем $2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$ и получим:

$$5\sin^2 x = 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) - \cos^2 x$$
$$5\sin^2 x = 2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x - \cos^2 x$$
$$3\sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \text{ и т.д.}$$

ПРИМЕР. Решить уравнение. $\sqrt{3}\sin 5x + 1 = \cos 10x$.

Используем формулу косинуса двойного угла: $\cos 10x = 1 - 2\sin^2 5x$ и получаем

$$\sqrt{3}\sin 5x + 1 = 1 - 2\sin^2 5x.$$

Тогда, $\sqrt{3}\sin 5x + 2\sin^2 5x = 0$ или $\sin 5x \cdot (\sqrt{3} + 2\sin 5x) = 0$.

Получаем, что $\sin 5x = 0$ или $\sqrt{3} + 2\sin 5x = 0$.

Решение первого уравнения очевидно. Решим второе уравнение. $2\sin 5x = -\sqrt{3}$. $\sin 5x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Потренируемся в использовании второго способа решения уравнения с синусом.

$$5x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n$$
$$5x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n$$

Внимательно следите за следующими преобразованиями:

$$5x = (-1)^n \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n \quad \Rightarrow 5x = (-1)^n \cdot (-1)^1 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$$
$$5x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n \quad \Rightarrow x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}$$

ПРИМЕР. Решить уравнение $\frac{1}{2}\sin 4x = 2\sin x \cos x$ и найти количество корней на $[0; 2\pi]$.

Обратите особое внимание на решение этого уравнения. Будут показаны наиболее часто встречаемые ошибки. Используем формулы двойного угла для преобразования левой части уравнения:

$\frac{1}{2}\sin 4x = \frac{1}{2} \cdot 2\sin 2x \cos 2x = \sin 2x \cos 2x$ и для правой части уравнения: $2\sin x \cos x = \sin 2x$.

Получаем $\sin 2x \cdot \cos 2x = \sin 2x$.

Надеюсь, Вы не хотите услышать от меня язвительные комментарии на тему: «Я теряю корни», поэтому Вы не сократите на sin2x, а перенесёте его в левую часть и вынесете за скобки $\sin 2x \cdot \cos 2x - \sin 2x = 0$.

Тогда $\sin 2x \cdot (\cos 2x - 1) = 0$. Имеем два случая: $\sin 2x = 0$ или $\cos 2x - 1 = 0$.

Решим сначала $\sin 2x = 0$

$$2x = \pi \cdot n;\ n \in Z. \Rightarrow\ x = \frac{\pi \cdot n}{2};\ n \in Z$$

Для отбора корней решим двойное неравенство $0 \le \frac{\pi \cdot n}{2} \le 2 \cdot \pi$

$$0 \le \pi \cdot n \le 4 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad 0 \le n \le 4$$

Нам подходят n = 0; 1; 2; 3; 4 - т.е. 5 корней.

Теперь $\cos 2x - 1 = 0$.

$$\cos 2x = 1 \quad \Rightarrow\ 2x = 2 \cdot \pi \cdot n;\ n \in Z. \quad \Rightarrow \quad x = \pi \cdot n;\ n \in Z$$

Теперь решим двойное неравенство для нахождения корней, которые удовлетворяют условию

$$0 \le \pi \cdot n \le 2\pi. \quad \Rightarrow \quad 0 \le n \le 2$$

Нам подходят n = 0; 1; 2 - т.е. 3 корня.

Казалось бы, в уравнении 8 корней. Но это ошибка. Корни в первом и втором случае могут совпадать. После нахождения целых значений n, **надо обязательно найти корни x в каждом из случаев.**

В первом случае $x = \frac{\pi \cdot n}{2};\ n = 0, 1, 2, 3, 4$. Получаем корни $x = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$.

Во втором случае $x = \pi \cdot n;\ n = 0, 1, 2$. Получаем корни $x = 0; \pi;\ 2\pi$.

Мы видим, что корни $x = 0; \pi;\ 2\pi$ - повторяются в обоих уравнениях, два раза их учитывать не надо.

Итак, в уравнении 5 корней $x = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$.

Замечание. Иногда ученики неправильно отбирают корни так: в первом случае n = 0; 1; 2; 3; 4 - т.е. 5 корней, во втором случае n = 0; 1; 2 - т.е. 3 корня, но 0; 1; 2 - совпадают, поэтому их два раза учитывать не надо. Это бессмысленное рассуждение. **Надо проверять совпадение корней, а не их номеров.**

Кстати, более правильным решением является запись разных букв, обозначающих целые числа в ответах. В данном случае $x = \frac{\pi \cdot n}{2};\ n \in Z$ и $x = \pi \cdot k;\ k \in Z$.

На тестировании это непринципиально, а при решении письменной работы в школе это надо учитывать.

ТЕСТ 1.

1. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$ и найти количество корней на промежутке $[0; 2\pi]$.

1) $2\pi k;\quad \frac{\pi}{4} + \pi n,\quad k, n \in Z;$ 3 корня
2) $\pi k;\quad -\frac{\pi}{4} + \pi n,\quad k, n \in Z;$ 5 корней.
3) $\pi k;\quad \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\quad k, n \in Z;$ 6 корней
4) $2\pi k;\quad \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\quad k, n \in Z;$ 5 корней

2. Решить уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin x = 1$ и найти количество корней на промежутке $[0; 2\pi]$.

1) $\pi k;\quad -\frac{\pi}{4} + \pi n,\quad k, n \in Z;$ 5 корней.
2) $2\pi k;\quad \frac{\pi}{4} + \pi n,\quad k, n \in Z;$ 4 корня
3) $\pi k;\quad \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\quad k, n \in Z;$ 6 корней
4) $2\pi k;\quad \frac{3\pi}{4} + \pi n,\quad k, n \in Z;$ 5 корней

3. Решить уравнение $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ и найти сумму корней на промежутке $[0; 2\pi]$.

1) π. 2) 2π. 3) 3π. 4) 4π.

4. Решить уравнение $5 - 4\sin^2 x = 5\cos^2 x$ и найти количество корней на промежутке $[0; 2\pi]$.

1) $2\pi k,\quad k \in Z;$ 2 корня 2) $\frac{\pi k}{2},\quad k \in Z;$ 4 корня 3) $\pi k,\quad k \in Z;$ 3 корня 4) $\pi + \pi k,\quad k \in Z;$ 3 корня

5. Решить уравнение $2\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)\sin 5x + 1 = \cos 10x$ и найти количество корней на [-90^0; 90^0].

1) $x_1 = \frac{\pi n}{5},\quad x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}$, 15 корней.
2) $x_1 = \frac{\pi n}{5},\quad x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}$, 11 корней.
3) $x_1 = \frac{\pi n}{5},\quad x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}$, 17 корней.
4) $x_1 = \frac{\pi n}{5},\quad x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}$, 10 корней.

123. ПРОСТЫЕ УРАВНЕНИЯ С «НЕКРАСИВЫМИ» ОТВЕТАМИ.

ПРИМЕР. Решить уравнение $3\sin^2 x - 3\cos 2x - 12\sin x + 7 = 0$ и найти количество корней, удовлетворяющих условию $-\frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{2\pi}{3}$.

Используем формулу косинуса двойного угла: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Получаем: $3\sin^2 x - 3(\cos^2 x - \sin^2 x) - 12\sin x + 7 = 0$

Упростим: $3\sin^2 x - 3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 12\sin x + 7 = 0$

$6\sin^2 x - 3\cos^2 x - 12\sin x + 7 = 0$

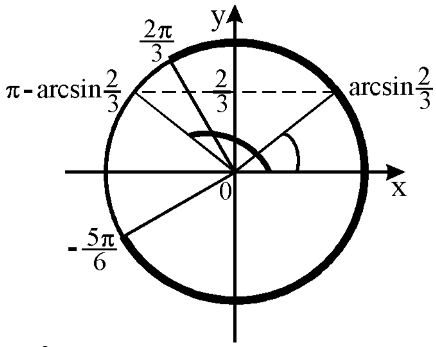
С помощью основного тригонометрического тождества заменим: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и получим

$$6\sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x) - 12\sin x + 7 = 0$$

$$6\sin^2 x - 3 + 3\sin^2 x - 12\sin x + 7 = 0$$

$$9\sin^2 x - 12\sin x + 4 = 0$$

Произведём замену переменных $\sin x = t$, учитывая, что $-1 \le t \le 1$. Получаем: $9t^2 - 12t + 4 = 0$.



$$t = \frac{2}{3} < 1$$

Значит: $\sin x = \frac{2}{3}$

$x_1 = \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$, $x_2 = \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$

Для отбора корней важно понимать, что арксинус любого числа, лежащего в пределах от нуля до единицы – есть угол, лежащий в пределах от 0^0 до 90^0.

Значит, угол $\alpha = \arcsin\frac{2}{3}$ - удовлетворяет условию уравнения, а углы, отличающиеся от этого угла на 360^0 и более градусов, нет. Теперь оценим величину угла $\beta = \pi - \arcsin\frac{2}{3}$.

Учтём, что функция арксинуса – возрастающая, т.е. большему значению числа, стоящего под знаком арксинуса, соответствует больший угол.

Мы знаем, что $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Мы знаем, что $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Учтём, что $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$, $\frac{2}{3} = 0{,}66$.

Т.к. $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\frac{\pi}{6} < \arcsin\frac{2}{3} < \frac{\pi}{4}$, т.е. угол $\alpha = \arcsin\frac{2}{3}$ лежит в пределах от 30^0 до 45^0.

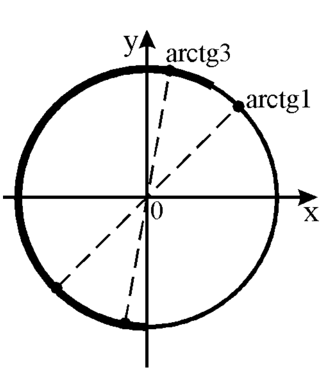
Тогда, угол $\beta = \pi - \arcsin\frac{2}{3}$ лежит в пределах от 135^0 до 150^0, что **не удовлетворяет** условию уравнения. Углы, отличающиеся от этого угла на 360^0 и более градусов, также не удовлетворяют условию уравнения.

Итак, условию уравнения удовлетворяет только один корень $x = \arcsin\frac{2}{3}$

Ответ: $x_1 = \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$, $x_2 = \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$, 1 корень.

ПРИМЕР. Решить уравнение $\mathrm{tg}^2 x - 4\mathrm{tg}\, x + 3 = 0$ и найти количество корней на $[0^0; 360^0]$.

В результате решения получаем $\mathrm{tg}x = 1$ и $\mathrm{tg}x = 3$.



Для нахождения количества корней уравнения нанесём точки, соответствующие этим решениям на единичную окружность. Корни, соответствующие уравнению $\mathrm{tg}x = 1$, лежат в первой и третьей четверти и удовлетворяют равенству $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$. Корни, соответствующие уравнению $\mathrm{tg}x = 3$, также лежат в первой и третьей четверти и удовлетворяют равенству $x_2 = \mathrm{arctg}3 + \pi n$. При нанесении точек на окружность учтём, что $\mathrm{arctg}3 > 60^0$, т.к. $\mathrm{arctg}\sqrt{3} = 60^0$.

При нахождении количества корней можно не решать двойные неравенства

$0 \le \frac{\pi}{4} + \pi n \le 2\pi$ и $0 \le \mathrm{arctg} 3 \le 2\pi$, а провести следующее рассуждение. Промежуток $[0^0; 360^0]$ соответствует одному обороту на единичной окружности. Значит, на этот промежуток попадают 4 указанные точки окружности. Поэтому количество корней уравнения равно 4.
Если бы в условии задачи требовалось бы найти количество корней на промежутке $[-360^0; 360^0]$, то ответ был бы 8 корней, т.к. указанный промежуток соответствует двум оборотам на окружности, а значит, каждой из указанных точек окружности будет соответствовать по 2 точки.
Если бы в условии задачи требовалось бы найти количество корней на промежутке $[60^0; 270^0]$, то ответ был бы 3 корня, т.к. данный промежуток соответствует указанной дуге на окружности.

ПРИМЕР. Решить уравнение $\frac{1}{2}\sin 4x = 2\sin x \cos x$ и найти количество корней на $[0; 2\pi]$.

Обратите особое внимание на решение этого уравнения. Будут показаны наиболее часто встречаемые ошибки. Используем формулы двойного угла для преобразования левой части уравнения:
$\frac{1}{2}\sin 4x = \frac{1}{2} \cdot 2\sin 2x \cos 2x = \sin 2x \cos 2x$ и для правой части уравнения: $2\sin x \cos x = \sin 2x$.
Получаем $\sin 2x \cdot \cos 2x = \sin 2x$. Надеюсь, Вы не хотите услышать от меня язвительные комментарии на тему: «Я теряю корни», поэтому Вы не сократите на sin2x, а перенесёте его в левую часть и вынесете за скобки $\sin 2x \cdot \cos 2x - \sin 2x = 0$.
Тогда $\sin 2x \cdot (\cos 2x - 1) = 0$. Имеем два случая: $\sin 2x = 0$ или $\cos 2x - 1 = 0$.
Решим сначала $\sin 2x = 0$

$$2x = \pi \cdot n;\ n \in Z. \Rightarrow\ x = \frac{\pi \cdot n}{2};\ n \in Z$$

Для отбора корней решим двойное неравенство $0 \le \frac{\pi \cdot n}{2} \le 2 \cdot \pi$

$$0 \le \pi \cdot n \le 4 \cdot \pi \Rightarrow 0 \le n \le 4$$

Нам подходят n = 0; 1; 2; 3; 4 - т.е. 5 корней.
Теперь $\cos 2x - 1 = 0$.

$$\cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2 \cdot \pi \cdot n;\ n \in Z. \Rightarrow\ x = \pi \cdot n;\ n \in Z$$

Теперь решим двойное неравенство для нахождения корней, которые удовлетворяют условию

$$0 \le \pi \cdot n \le 2\pi. \Rightarrow 0 \le n \le 2$$

Нам подходят n = 0; 1; 2 - т.е. 3 корня.
Казалось бы, в уравнении 8 корней. Но это ошибка. Корни в первом и втором случае могут совпадать.
После нахождения целых значений n, **надо обязательно найти корни x в каждом из случаев.**

В первом случае $x = \frac{\pi \cdot n}{2};\ n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Получаем корни $x = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$.

Во втором случае $x = \pi \cdot n;\ n = 0, 1, 2$. Получаем корни $x = 0; \pi;\ 2\pi$.
Мы видим, что корни $x = 0; \pi;\ 2\pi$ - повторяются в обоих уравнениях, два раза их учитывать не надо.

Итак, в уравнении 5 корней $x = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$.

Замечание. Иногда ученики неправильно отбирают корни так: в первом случае n = 0; 1; 2; 3; 4 - т.е. 5 корней, во втором случае n = 0; 1; 2 - т.е. 3 корня, но 0; 1; 2 - совпадают, поэтому их два раза учитывать не надо. Это бессмысленное рассуждение. **Надо проверять совпадение корней, а не их номеров.**
Кстати, более правильным решением является запись разных букв, обозначающих целые числа в ответах.

В данном случае $x = \frac{\pi \cdot n}{2};\ n \in Z$ и $x = \pi \cdot k;\ k \in Z$.

На тестировании это непринципиально, а при решении письменной работы в школе это надо учитывать.

ТЕСТ 1.

1. Решить уравнение $4\sin^2 2x + 3\sin 2x - 1 = 0$

1) $x_1 = \frac{1}{2}\cdot(-1)^n \arcsin\frac{1}{4} + \frac{\pi n}{2};\quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

2) $x_1 = (-1)^n \arcsin\frac{1}{8} + \frac{\pi n}{2};\quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

3) $x_1 = \frac{1}{2}\cdot(-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{4} + \frac{\pi n}{2};\quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k$

4) $x_1 = (-1)^n \arcsin\frac{1}{4} + \frac{\pi n}{2};\quad x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

2. Решить уравнение $3\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - 2\operatorname{tg} x = 0$

1) $x_1 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n;\quad x_2 = 2\pi k$

2) $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2\pi n;\quad x_2 = 2\pi k$

3) $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n;\quad x_2 = \pi k$

4) $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi n;}{2}\quad x_2 = \frac{\pi k}{2}$

3. Решить уравнение $4\left(\cos^2 x + \cos 2x\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2$ и найти количество корней, удовлетворяющих условию $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{2\pi}{3}$.

.

1) $x_1 = \pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n,\quad x_2 = \pm\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n$, 1 корень.

2) $x_1 = \pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n,\quad x_2 = \pm\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n$, 2 корня.

3) $x_1 = \pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n,\quad x_2 = \pm\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n$, 3 корня.

4) $x_1 = \pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n,\quad x_2 = \pm\arccos\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n$, 4 корня.

4. Решить уравнение $\sin^2 x\cdot\left(24\cos x - 5\right) + 24\cos^3 x = 0$ и найти количество корней на [0^0; 360^0].

1) $x = \pm\arccos\frac{1}{5} + \pi n;\ 4$ корня

2) $x = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n;\ 2$ корня.

3) $x = \arccos\frac{1}{5} + \pi n;\ 2$ корня

4) $x = \pm\arccos\frac{4}{5} + 2\pi n;\ 2$ корня

124. ПРОСТЫЕ УРАВНЕНИЯ. ИТОГОВЫЙ. ТЕСТ 1.

1. Найти решение уравнения $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-3)\right)=1,\quad 3<x<9$ на указанном промежутке.

1) 4, 8. 2) 4, 5. 3) 4, 6. 4) 4, 7.

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 1/\sqrt{3}$ и найти количество корней на указанном промежутке $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2\cdot\pi}{3}$.

1) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z;$ 1 корень 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z;\quad 2$ корня

3) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in Z;$ 2 корня 4) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z;\quad 3$ корня

3. Решить уравнение $\sin x=-1/2$ и найти количество корней на указанном промежутке $-\frac{2\cdot\pi}{3}\le x\le\frac{4\cdot\pi}{3}$.

1) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z;\quad \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z;$ 2 корня 2) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z;\quad -\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z;\quad 2$ корня.

3) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z;\quad -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z;$ 3 корня 4) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z;\quad -\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z;$ 2 корня.

4. Найти решение уравнения $1+2\sin\frac{\pi x}{3}=0,\quad 2<x<4$ на указанном промежутке

1) 3,2. 2) 3,5. 3) 3,6. 4) 3,8.

5. Найти решение уравнения $\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad 180^o<x<270^o$ на указанном промежутке

1) 215^0. 2) 225^0. 3) 240^0. 4) 255^0.

6. Найти решение уравнения $\operatorname{tg}2x=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad 90^o<x<180^o$ на указанном промежутке

1) 96^0; 2) 105^0. 3) 120^0; 4) 144^0.

7. Решить уравнение $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ и найти сумму корней, удовлетворяющих условию $-10^o<x<90^o$. 1) 30^0. 2) 40^0. 3) 50^0. 4) 60^0.

8. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x=1/\sqrt{3}$ и найти количество корней на указанном промежутке $-\frac{2\cdot\pi}{3}\le x\le\frac{4\cdot\pi}{3}$.

1) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z;\quad 2$ корня 2) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in Z;\ 4$ корня

3) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z;\quad 3$ корня 4) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in Z;\quad 3$ корня

9. Решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3}$ и найти количество корней, удовлетворяющих условию $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5\cdot\pi}{3}$.

1) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in Z;$ 4 корня 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z;$ 4 корня

3) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in Z;$ 3 корня 4) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z;$ 3 корня

10. Решить уравнение $1-4\sin^2\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ и найти сумму корней, удовлетворяющих условию $-40^o<x<40^o$. 1) 24^0. 2) -24^0. 3) 0^0. 4) 30^0.

11. Решить уравнение $6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0$ и найти количество корней, удовлетворяющих условию $-2\pi < x < 2\pi$. 1) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, 2 корня. 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, 1 корень.

3) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, 3 корня. 4) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, 2 корня.

12. Решить уравнение $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$ и найти количество корней на $[0^0; 300^0]$.

1) $x = \frac{\pi}{6} + \pi n;$ 2 корня 2) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n;$ 3 корня

3) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n;$ 3 корня. 4) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n;$ 2 корня

13. Решить уравнение $\mathrm{tg}^2 x - \left(\sqrt{3} + 1\right)\mathrm{tg}x + \sqrt{3} = 0$ и найти наименьшее решение на $(0^0, 90^0)$.

1) 15^0. 2) 30^0. 3) 45^0. 4) 60^0.

14. Решить уравнение $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$ и найти количество корней на промежутке $[0; \pi]$.

1) $2\pi k;\ \ \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ k, n \in Z;$ 3 корня 2) $\pi k;\ \ \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ k, n \in Z;$ 3 корня

3) $\pi k;\ \ \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ k, n \in Z;$ 4 корня 4) $2\pi k;\ \ \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ k, n \in Z;$ 3 корня

15. Решить уравнение $5\sin^2 x = 2 - \cos^2 x$ и найти количество корней на промежутке $[0; \pi]$.

1) $\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z;$ 1 корень 2) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z;$ 2 корня

3) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z;$ 2 корня 4) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z;$ 1 корень

16. Решить уравнение $7 + 4\sin x\cos x + \frac{3}{\cos\left(90^o - 2x\right)} = 0$ и найти число корней на $[0^0; 360^0]$.

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4.

17. Решить уравнение $1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos\left(21\pi - x\right)$ и найти сумму корней, удовлетворяющих условию $-2\pi < x < 4\pi$. 1) $x_1 = \pi + \pi n,\ \ x_2 = \pm\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$. $\frac{13\pi}{3}$ 2) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$. $\frac{11\pi}{6}$

3) $x_1 = \pi + 2\pi n,\ \ x_2 = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n$. $\frac{17\pi}{3}$ 4) $x_1 = \pi + \pi n,\ \ x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$. $\frac{15\pi}{4}$

18. Решить уравнение $3\sin^2 x - 3\cos 2x - 12\sin x + 7 = 0$ и найти количество корней, удовлетворяющих условию $-\frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{2\pi}{3}$. 1) $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n$, 1 корень. 2) $x = \pm\arcsin\frac{2}{3} + \pi n$, 2 корня.

3) $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, 2 корня. 4) $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$, 1 корень.

19. Решить уравнение: $\sin^3 x = 2\sin 2x$.

1) $x_1 = 2\pi n,\ \ x_2 = \pm\arccos\left(\sqrt{5} - 2\right) + \pi n$ 2) $x_1 = \pi n,\ \ x_2 = \pm\arccos\left(\sqrt{5} - 2\right) + 2\pi n$.

3) $x_1 = \frac{\pi n}{2},\ \ x_2 = \pm\arccos\left(\sqrt{5} - 2\right) + \pi n$ 4) $x_1 = 2\pi n,\ \ x_2 = \pm\arccos\left(\sqrt{5} - 2\right) + 2\pi n$