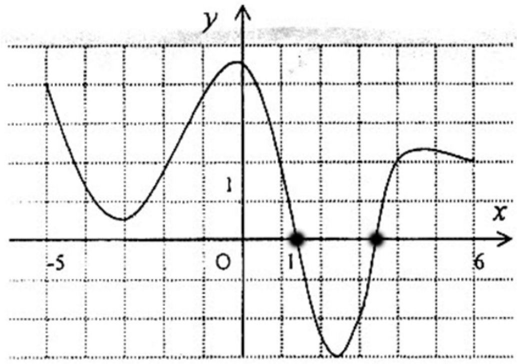
Решения

1. Сумма внутренних углов любого треугольника равна 180^o. У равнобедренного треугольника углы при основании равны. Следовательно, искомый угол равен $\alpha = 180^o - 2\cdot 35^o = 110^o$. Ответ 4.

2. Одночленом называется произведение, состоящее из числового множителя (коэффициента) и одной или несколько букв (переменных), взятых каждая с тем или иным целым положительным показателем степени. Многочлен состоит из суммы или разности нескольких одночленов. Например, $2\cdot x^3 + 3\cdot x^4 - 5$ - многочлен, состоящий из трёх одночленов $2\cdot x^3; 3\cdot x^4; -5$. В данном примере в ответах 1, 2, 4, 5 - одночлены, в ответе 3 - двучлен. Ответ 3.



3. Нули функции - это такие значения аргумента *x*, при которых значения функции у равны нулю. В данном случае функция равна нулю при $x \approx 1,4$ и при $x \approx 3,4$. Ответ 4

4. Тут может быть огромное количество решений. **ВЫ ДОЛЖНЫ ПОСЧИТАТЬ ЭТОТ ПРИМЕР САМОСТОЯТЕЛЬНО.** Ответ 2

5. При умножении **ОБЕИХ** частей неравенства на **ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО** меняется знак неравенства. Следовательно, ответ 2.

6. Сумма двух сторон треугольника не может быть меньше длины третей стороны. Следовательно, третья сторона должна быть меньше 13, но больше 5. Ответ 3.

7. $$\left(\cos\alpha + 2\sin\alpha\right)^2 - 2\sin 2\alpha - 1 = \cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha - 2\sin 2\alpha - 1 =$$
$$= \cos^2\alpha + 2\sin 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 2\sin 2\alpha - 1 = \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha + \sin^2\alpha - 1 = 3\sin^2\alpha$$
Ответ 2.

8. Линейная функция задается формулой $y = kx + b$

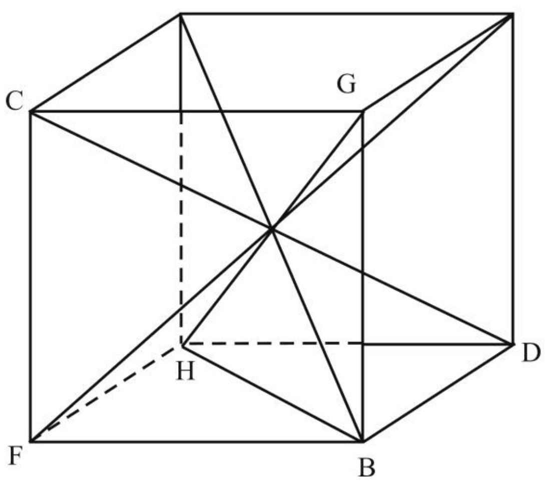
Запись $f(3) = 4$ означает, что при x = 3, y = 4. Запись $f(5) = 0$ означает, что при x = 5, y = 0.

Следовательно $\begin{cases} 4 = k\cdot 3 + b \\ 0 = k\cdot 5 + b \end{cases} \Rightarrow b = -5k \Rightarrow 4 = 3k - 5k \Rightarrow 4 = -2k \Rightarrow k = -2 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow y = -2x + 10$ Ответ 2.

9. Теорема Виета. Если квадратное уравнение $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то сумма корней $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, а произведение корней $x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Верно и обратное утверждение: если числа x_1 и x_2 удовлетворяют равенствам $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$.

В данном случае произведение корней уравнения $2x^2 - 18x + 27 = 0$ равно $x_1\cdot x_2 = \frac{27}{2}$, а сумма корней $x_1 + x_2 = -\frac{-18}{2}$. Если каждый из корней уменьшить в 3 раза, то их произведение уменьшится в 9 раз, и станет равным $x_1\cdot x_2 = \frac{3}{2}$, т.е. $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$, а сумма уменьшится в 3 раза, и станет равной, $x_1 + x_2 = -\frac{-6}{2} = 3$, т.е. $\frac{b}{a} = -3$.



Разделим левую и правую часть уравнения $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ на а, и получим $x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a} = 0$ - квадратное уравнение, записанное в таком виде, называется приведённым.

В данном случае приведённое квадратное уравнение имеет вид $x^2 - 3\cdot x + \frac{3}{2} = 0$. Умножим обе части равенства на 2 и получим $2\cdot x^2 - 6\cdot x + 3 = 0$. Ответ 3.

10. У куба 4 диагонали – AB, CD, EF, HG. Их длины одинаковы.
Найдем длину диагонали AB. Рассмотрим треугольник ABH. Он прямоугольный. Один катет AH является ребром куба и равен a, а второй катет является диагональю квадрата, и равен $\mathrm{HB}=\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{a}^2}=\mathrm{a}\sqrt{2}$.
Следовательно $\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{AH}^2+\mathrm{HB}^2}=\sqrt{\mathrm{a}^2+2\mathrm{a}^2}=\mathrm{a}\sqrt{3}$. Сумма длин всех диагоналей будет равна $4\cdot \mathrm{a}\sqrt{3}=4\cdot 5\sqrt{3}=20\sqrt{3}$. Ответ 4.

11. Ответ 2.

$$\left(\frac{5}{x-2}-x-2\right)\cdot\frac{2-x}{x^2+6x+9}=\left(\frac{5-(x+2)(x-2)}{x-2}\right)\cdot\frac{-(x-2)}{(x+3)^2}=\left(\frac{5-x^2+4}{x-2}\right)\cdot\frac{-(x-2)}{(x+3)^2}=\left(\frac{-(x^2-9)}{x-2}\right)\cdot\frac{-(x-2)}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{-(x-3)(x+3)}{x-2}\cdot\frac{-(x-2)}{(x+3)(x+3)}=\frac{x-3}{x+3}=\frac{0{,}75-3}{0{,}75+3}=-\frac{2{,}25}{3{,}75}=-0{,}6$$

12. Произведём замену переменных $(x^2-9)=t$.

$$t^2-8t+7=0$$

$$D=8^2-4\cdot 7=64-28=36=6^2$$

$$t_{1,2}=\frac{8\pm 6}{2}\Rightarrow t_1=7,\quad t_2=1$$

Вспоминаем о замене.

$$(x^2-9)=7\quad\Rightarrow x^2=16\Rightarrow x_{1,2}=\pm 4$$

$$(x^2-9)=1\quad\Rightarrow x^2=10\Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{10}$$

Итого имеем 4 корня. Их произведение равно $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=4\cdot(-4)\cdot\sqrt{10}\cdot\left(-\sqrt{10}\right)=160$ Ответ 5.

13. До приведения к общему знаменателю избавимся от иррациональностей в знаменателях.

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}+\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right)=$$

$$=\left(\frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}+\frac{\sqrt{ab}+b}{a-b}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left(\frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=$$

$$=\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

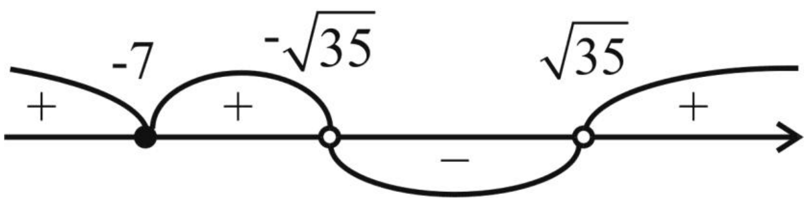
Вы могли решать иначе. Ответ 2.

14. Примем всю работу за условную единицу. Скорость работы сенокосилки равна отношению работы ко времени её работы. Тогда скорость работу первой сенокосилки равна 1/6, а второй сенокосилки 1/5. Тогда их совместная скорость 1/5+1/6.

Составляем уравнение $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)\cdot \mathrm{x}=0{,}88$, где x - время совместной работы сенокосилок, а 0,88 - совершённая ими работы. Ответ: 2,4 ч.

15. Выражение (x^2+7) всегда больше нуля. Поэтому перепишем наше неравенство в виде

$$\frac{(x+7)^2}{35-x^2}\geq 0\Rightarrow\frac{(x+7)^2}{\left(\sqrt{35}-x\right)\left(\sqrt{35}+x\right)}\geq 0\Rightarrow\frac{(x+7)^2}{\left(x-\sqrt{35}\right)\left(\sqrt{35}+x\right)}\leq 0$$. Учтём, что $\sqrt{35}\approx 5{,}9$



Целые решения неравенства это –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. И не забываем про –7. Итого 12 целых решений. Ответ 4.

16. При записях обратите внимание, что в случае измерения угла в градусах, обязательно указывать значок градусов – маленький кружок в правом верхнем углу. Отсутствие кружочка будет означать, что угол измеряется в радианах. Например, если сказано, что угол равен 3, то это означает, что он равен 3 радиана. А если сказано, что угол равен 3^0, то он равен 3 градуса. Также вспомним, что 1 рад $\approx 57,3°$.

Тогда 5 рад $\approx 286°$ - четвёртая четверть, а тангенс в этой четверти отрицателен…. Ответ 4.

17. Пусть катеты треугольника равны a и b. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 121$.
Отрезки касательных, выходящих из вершины одного угла и заканчивающиеся в точке касания, равны. Тогда один из этих отрезков равен a-2, а второй b-2. Значит, гипотенуза равна a-2+b-2=11. Тогда a+b=15.

Решаем систему уравнений и получаем «отстойные» корни $a = \frac{15+\sqrt{17}}{2}$ и $b = \frac{15-\sqrt{17}}{2}$. Тогда площадь прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b = \frac{1}{2}\cdot\frac{15+\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{15-\sqrt{17}}{2} = 26$.

Замечание 1. Если $a = \frac{15+\sqrt{17}}{2}$, то $b = \frac{15-\sqrt{17}}{2}$, а если $a = \frac{15-\sqrt{17}}{2}$, то $b = \frac{15+\sqrt{17}}{2}$, произведение величин не поменяется.

Замечание 2. Так как для нахождения площади треугольника, нас интересует произведение катетов, можно использовать «фокус»: возведём в квадрат обе части равенства a+b=15 и получим $a^2 + 2ab + b^2 = 225$. Тогда $2ab = 104 \Rightarrow ab = 52$. Значит, площадь треугольника $S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b = 26$.

18. Четные и нечетные функции.

Числовое множество X называют симметричным относительно точки x = 0, если вместе с любым своим элементом x оно содержит и противоположный элемент (-x).

Другими словами, каждому значению аргумента x из области определения, должно соответствовать противоположное значение –x из области определения.

Примеры симметричных множеств:

$$(-\infty; -2)\cup(2; \infty), \quad (-25; 25), \quad (-\infty; \infty).$$

Функцию y = f(x) называют четной, если она определена на симметричном множестве X и для любого x выполняется равенство:

$$f(-x) = f(x).$$

Это означает, что для любых противоположных значениях аргумента, значения функции равны.

Например, исследуем на чётность функцию $y = \cos x \cdot \log_3 x$.

Во-первых, найдём область определения функции.

Очевидно, что $D(y) = (0; +\infty)$, а значит, область определения функции не является симметричной относительно точки O. Поэтому, дальнейшее исследование на чётность не имеет смысла.

Пример. Исследуем на чётность функцию $y(x) = x^3 \cdot \arcsin x$.

Во-первых, найдём область определения функции $D(y) = [-1;1]$, т.е. область определения функции симметрична относительно точки 0.

Значит, имеет смысл продолжить исследование.

Зададим функцию $y(-x)$. Для этого заменим x на –x.

$$y(-x) = (-x)^3 \cdot \arcsin(-x) = -x^3 \cdot (-\arcsin x) = x^3 \cdot \arcsin x = y(x)$$

Т.е. значения функции при противоположных значениях аргумента равны.
Поэтому, функция $y(x)=x^3\cdot\arcsin x$ является чётной.

Пример. Исследуем на чётность функцию $y(x)=x^3\cdot\arccos x$.

Во-первых, найдём область определения функции $D(y)=[-1;1]$, т.е. область определения функции симметрична относительно точки 0.
Значит, имеет смысл продолжить исследование.
Зададим функцию $y(-x)$. Для этого заменим x на –x.

$$y(-x)=(-x)^3\cdot\arccos(-x)=-x^3\cdot(\pi-\arccos x)$$

Функция $y(x)=x^3\cdot\arccos x$ не является ни чётной, ни нечётной.
Функцию y = f(x) называют нечетной, если она определена на симметричном множестве X и для любого x выполняется равенство:

$$f(-x)=-f(x).$$

Например, $f(x)=x^3$ – нечетная функция, так как она определена на симметричном множестве

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x) \text{ и } D(y)=(-\infty;\infty).$$

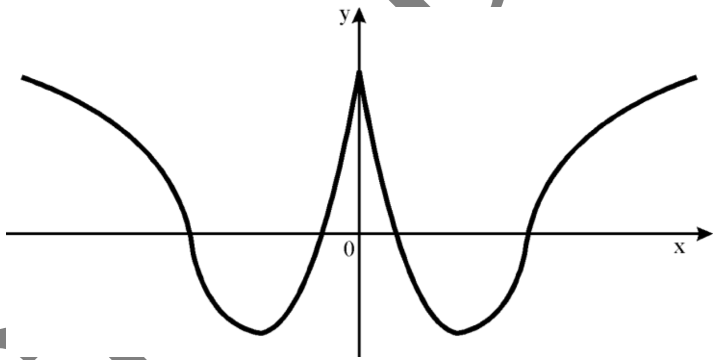
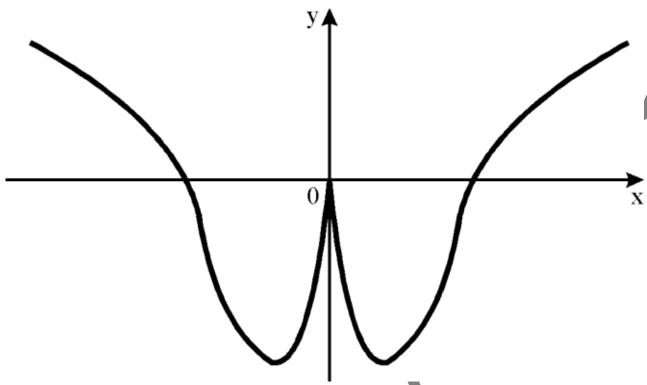
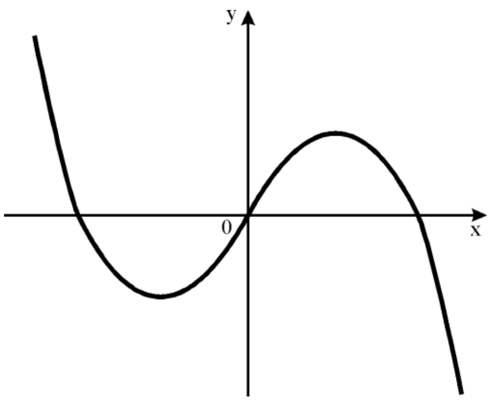


График чётной функции всегда симметричен относительно оси ординат y.

Поэтому количество корней уравнения у чётной функции всегда чётное число, кроме случая, когда график чётной функции проходит через начало координат.



Сумма корней чётной функции (точек пересечения оси абсцисс OX) всегда равна нулю, т.к. на каждый положительный корень x приходится отрицательный корень –x.
График нечётной функции всегда симметричен относительно начало координат.
Поэтому количество корней уравнения у нечётной функции всегда нечётное число, кроме случая, когда график нечётной функции **не** проходит через начало координат.



В случае нечётной функции это может быть только в случае, если функция не определена в точке x = 0.

Сумма корней чётной функции (точек пересечения оси абсцисс OX) всегда равна нулю, т.к. на каждый положительный корень x приходится отрицательный корень –x.
Если $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ нечетные функции, то их сумма и разность также нечетные функции, а частное и произведение – четные функции.
Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций являются четными функциями.
Итак, функции бывают: а) чётными, б) нечётными, в) ни чётными, ни нечётными (функции общего вида).
Пример решения задачи.

Найдите сумму абсцисс точек пересечения графика функции $y=\lg\dfrac{x-1}{x+1}$ с осью OX.

Надо догадаться исследовать эту функцию на чётность. Сначала найдём область определения функции. Для этого решим неравенство $\frac{x-1}{x+1} > 0$. Получаем $D(y) = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

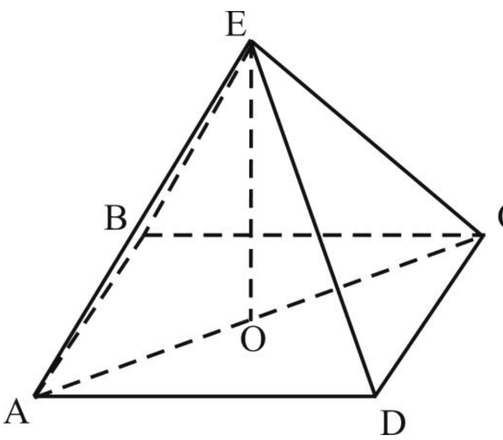
Теперь, определим функцию $y(-x)$. $y(-x) = \lg\frac{-x-1}{-x+1}$. Казалось бы, функция ни чётная, ни нечётная. Но проведём дополнительные преобразования.

$$y(-x) = \lg\frac{-x-1}{-x+1} = \lg\frac{-(x+1)}{-(x-1)} = \lg\frac{x+1}{x-1} = \lg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1} = -\lg\frac{x-1}{x+1} = -y(x).$$

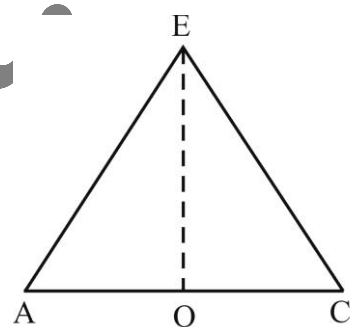
Мы доказали, что функция $y = \lg\frac{x-1}{x+1}$ - нечётная. Это означает, что сумма абсцисс точек пересечения графика функции с осью OX равна нулю.

Вопрос задачи мог быть сформулирован иначе. Найдите сумму корней уравнения $\lg\frac{x-1}{x+1} = 0$. Решение и ответ были бы такими же.

А теперь исследуйте на чётность и нечётность все пять функций, и покажите решения преподавателю.



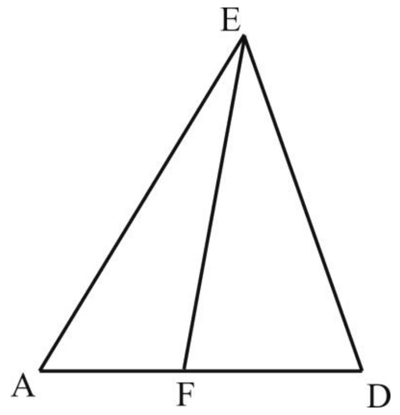
B1. Сделаем чертеж



Диагональ AC квадратного основания равна $6\sqrt{2}$. Зная площадь диагонального сечения, найдём высоту пирамиды EO=H=4.

Теперь найдём ребро AE=BE=CE=DE пирамиды $\sqrt{34}$.

Затем находим апофему боковой грани h=5.



И наконец находим площадь боковой поверхности пирамиды $S_{бок} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5 = 60$. Не забудем прибавить площадь основания 36. Ответ: 96.

B2. Имеем

$$\begin{cases}(x-y)^2 = xy+5\\ x-y=3\end{cases} \Rightarrow x = 3+y$$

Подставим x в первое уравнение. Имеем

$$(3+y-y)^2 = (3+y)y+5 \Rightarrow 9 = 3y+y^2+5 \Rightarrow y^2+3y-4=0 \Rightarrow D = 3^2-4\cdot(-4) = 25$$

$$y_{1,2} = \frac{-3\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{matrix} y_1=-4\\ y_2=1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3-4=-1\\ x_2=3+1=4\end{matrix}$$

Очевидно, что наименьшая пара решений первая. Значит x + y = –1 + (–4) = –5.
Ответ –5.

B3. Так как $a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$

Имеем $$a_1+2d+a_1+4d+a_1+7d+a_1+12d+a_1+15d+a_1+17d = 33 \Rightarrow 6a_1+57d=33$$
$$2a_1+19d=11$$

По определению $S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$

В нашем случае $S_{20} = \frac{2a_1+d(20-1)}{2}20 = \frac{2a_1+19d}{2}20 = \frac{11}{2}20 = 110$

Теперь решим задачу **вторым способом**, с помощью фишки арифметической прогрессии: сумма двух членов арифм. прогрессии равна сумме двух других членов прогрессии, если равны суммы номеров членов прогрессии $a_n + a_m = a_p + a_k$, если $n + m = p + k$. Это утверждение справедливо и для суммы любого количества членов прогрессии, например $a_n + a_m + a_f = a_p + a_k + a_g$, если $n + m + f = p + k + g$.

В данной задаче $a_3 + a_{18} = a_5 + a_{16} = a_8 + a_{13} = 11$.

С другой стороны $a_1 + a_{20} = a_8 + a_{13} = 11$.

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} 20 = \frac{11}{2} 20 = 110$$

B4. Рекомендую скачать у меня с сайта www.repet.by тему «Уравнения» (она в свободном доступе) и внимательно изучить все темы, разобранные в ней.

Тут надо увидеть однородное уравнение $x^2 - 2x \cdot \sqrt{3x+4} + (3x+4) = 0$

Делим все слагаемые уравнение на x^2.

Имеем $\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x \cdot \sqrt{3x+4}}{x^2} + \frac{(3x+4)}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2\sqrt{3x+4}}{x} + \left(\frac{\sqrt{3x+4}}{x}\right)^2 = 0$

Используем замену переменных $\frac{\sqrt{3x+4}}{x} = a$ и получим $a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0$

$$a = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3x+4}}{x} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3x+4}}{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{3x+4} = x.$$

Возводим в квадрат. НЕ ЗАБЫВАЯ, что $x \geq 0$.

$$\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = x^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{3-5}{2} = -1 - \textit{не удовлетворяет} \end{array}$$

Ответ 4.

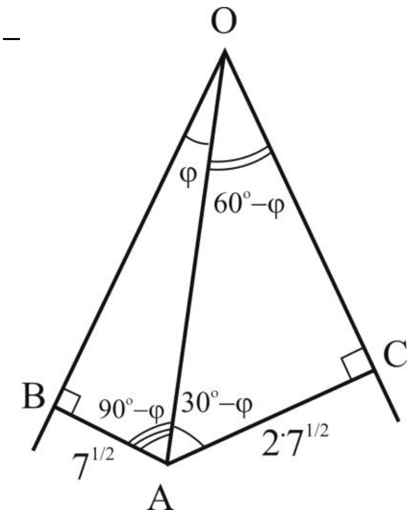
B5. Функция y = sinx имеет наибольшее значение 1 и наименьшее значение -1. Значит, выражение 22sin6x лежит в пределах от -22 до 22. Тогда выражение 53-22sin6x лежит в пределах от 31 до 75. Извлекаем корни из чисел, являющихся краями промежутка, и получаем промежуток от 5 с копейками до 8 с копейками. Значит, целые значения функции 6, 7, 8, и их среднее арифметическое равно 7.

B6. По определению модуля

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 4 = x^3 + 4 \\ x^3 + 2x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 4 = -x^3 - 4 \\ x^3 + 2x^2 - 4 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^3 + 2x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 + x^2 = 0 \\ x^3 + 2x^2 - 4 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \quad x = -2 \\ x^3 + 2x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \quad x = -1 \\ x^3 + 2x^2 - 4 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 0, \quad x = - \end{cases}$$

Корень $x_2 = -2$ не подходит, так как при нем выражение $x^3 + 2x^2 - 4$ меньше нуля. Итого имеем 3 корня. Наибольший корень 2. Значит, ответ 6.

B7.Пусть $AB = \sqrt{7},\ AC = 2\sqrt{7}, < AOB = \varphi, < AOC = 60^0 - \varphi, AO = x - ?$



Из треугольников АОВ и АОС $\sin\varphi = \frac{\sqrt{7}}{x}, \sin\left(60^0 - \varphi\right) = \frac{2\sqrt{7}}{x}$.

Разделим уравнения и получим $\frac{\sin\varphi}{\sin\left(60^0 - \varphi\right)} = \frac{1}{2}$.

Тогда $2 \cdot \sin\varphi = \sin\left(60^0 - \varphi\right)$.

Раскроем скобки $2 \cdot \sin\varphi = \sin 60^0 \cdot \cos\varphi - \cos 60^0 \cdot \sin\varphi$ и упростим

$2 \cdot \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi$. Тогда $\frac{5}{2} \cdot \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi$, а значит $tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Зная тангенс угла, находим косинус угла с помощью формулы $\mathrm{tg}^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$,

$\cos\varphi = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{7}}$, затем с помощью формулы $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ находим $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{7}}$.

Теперь находим x из формулы $\sin\varphi = \frac{\sqrt{7}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{x} \Rightarrow x = \frac{14}{\sqrt{3}}$. Ответ: 14.

B8. Немного преобразуем условие $\sqrt{3} \cdot \sin \pi x + \cos \pi x = -2$.
Используем свойство

$$\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x + \frac{1}{2} \cdot \cos x\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos x\right) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Тогда $2 \cdot \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) = -2$, а значит $\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$.

Обратите внимание, что в условии уравнения нет значка градусов. Следовательно, углы указаны в радианах.

$\pi x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + 2k, k \in Z$

$x = -\frac{2}{3} + 2k, k \in Z$

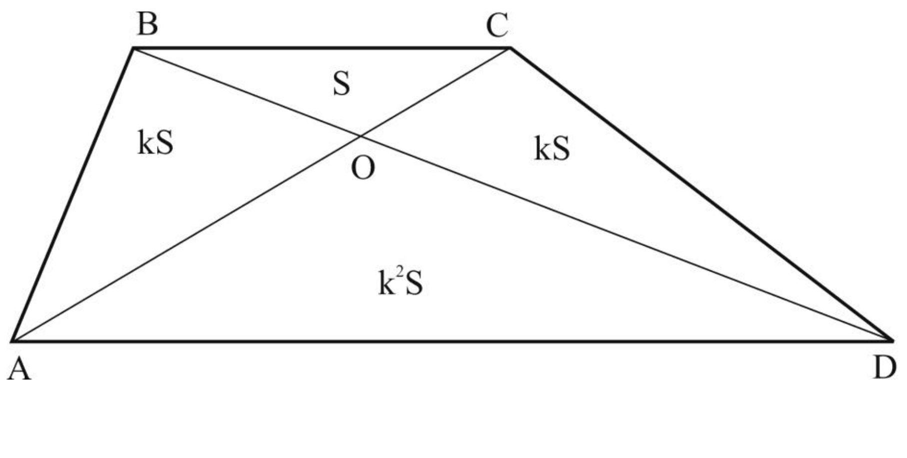
Из условия $-1 \le x \le 4$ следует, что $-1 \le -\frac{2}{3} + 2k \le 4$, т.е. $-\frac{1}{3} < 2k < \frac{14}{3}, k \in Z$. Получаем

$-\frac{1}{6} < k < \frac{7}{3}, k \in Z$

Таким образом, при k = 0; 1; 2 получаем $x = -\frac{2}{3}; 1\frac{1}{3}; 3\frac{1}{3}$.

Найдём сумму корней. *Ответ:* 4.

B9. Площади треугольников АОВ и СОД равны друг другу и в k раз больше площади треугольника СОВ. Таким образом, площадь треугольника СОВ равна 3. Треугольники СОВ и АОД подобны, с коэффициентом k=3, а значит, отношение площадей этих треугольников равно k^2 = 9. т.е. площадь треугольника



АОД равна 27. Итого, площадь трапеции 3+9 +9 +27 = 48.

B10. Для начала найдем ОДЗ. $x^2-3x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq 1,2.$

Перепишем уравнение в виде

$$x^2-3x+2=\frac{6^2\left(x+2\right)^2}{x^2-3x+2}-\frac{\left(x^2-9x-10\right)^2}{\left(x-2\right)\left(x-1\right)}$$

$$x^2-3x+2=\frac{\left(6x+12\right)^2-\left(x^2-9x-10\right)^2}{x^2-3x+2}$$

$$x^2-3x+2=\frac{\left(6x+12-\left(x^2-9x-10\right)\right)\left(6x+12+\left(x^2-9x-10\right)\right)}{x^2-3x+2}$$

$$x^2-3x+2=\frac{\left(6x+12-x^2+9x+10\right)\left(6x+12+x^2-9x-10\right)}{x^2-3x+2}$$

$$x^2-3x+2=\frac{\left(-x^2+15x+22\right)\left(x^2-3x+2\right)}{x^2-3x+2}\Rightarrow x^2-3x+2=-x^2+15x+22$$

$$2x^2-18x-20=0\Rightarrow D=18^2+4\cdot 2\cdot 20=324+160=22^2$$

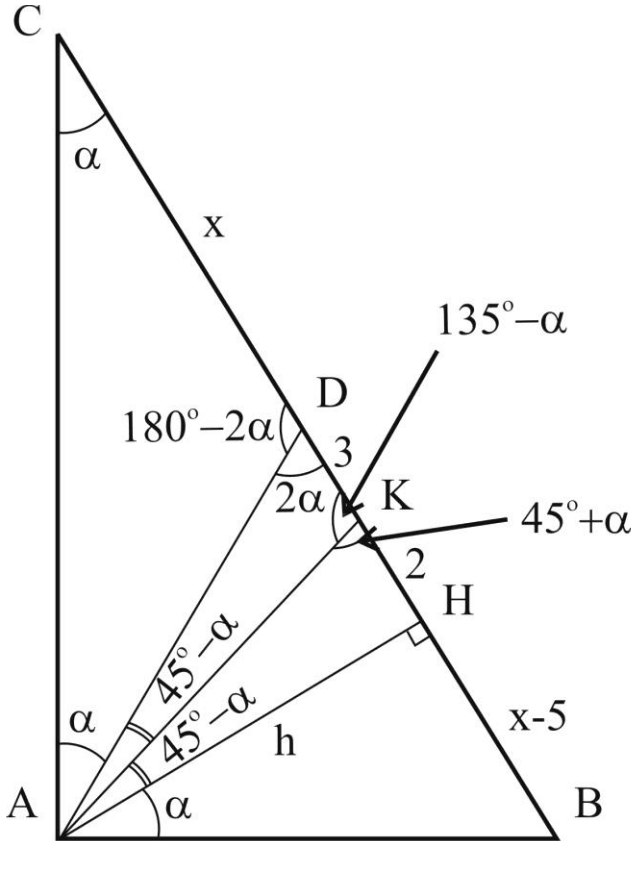
$$x_{1,2}=\frac{18\pm 22}{4}=\begin{matrix} x_1=\dfrac{18+22}{4}=10 \\ x_2=\dfrac{18-22}{4}=-1\end{matrix}$$

Произведение корней равно –10. Ответ –10.

B11. В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Обозначим отрезки АД = СД = ВД = x, высоту АН обозначим h. Также учтём, что ДК =3, КН=2.

По свойству высоты, проведённой из вершины прямого угла $h^2=a_c\cdot b_c$, где a_c = x +5, b_c = x-5.

Получаем, что $h^2=\left(x-5\right)\cdot\left(x+5\right)$ (1).



Рассмотрим равнобедренный треугольник АДС, в котором углы АСД и САД равны (обозначим их α. Тогда угол АДС равен 180^0 - 2α. Значит, угол АДК равен 2α.

Т.к. АК - биссектриса прямого угла, угол САК равен 45^0, тогда угол ДАК равен 45^0- α.

Рассмотрим треугольник ДАК, и найдём величину угла ДКА: 180^0 - 2α - 45^0+ α = 135^0- α.

Тогда угол АКН равен 180^0 - (135^0- α) = 45^0+ α.

Теперь рассмотрим треугольник КАН и найдём угол КАН: 180^0 - (45^0+ α) - 90^0 = 45^0- α.

Мы получили, что углы ДАК и НАК равны, а значит АК - биссектриса угла ДАН.

По свойству биссектрисы отношение сторон угла равно отношению отрезков, на которые биссектриса делит противоположную сторону, т.е. $\dfrac{x}{h}=\dfrac{3}{2}$ (2).

Решаем систему уравнений (1) и (2). Затем находим гипотенузу, равную 2x.

Важное замечание. Задачу можно решить быстрее. Угол В равен 90^0- α., тогда угол ВАН равен α. Отсюда сразу же

следует, что АК - биссектриса угла ДАН.
Ответ: 30.

B12. Обозначим скорость первого автомобиля - x, второго автомобиля - y, третьего автомобиля - z. Скорость третьего автомобиля относительно первого равна z - x, скорость третьего автомобиля относительно второго равна z - y.

Время, за которое третий автомобиль догонит второй равно $\frac{30}{z-y}$. За это же время третий автомобиль пройдёт относительно первого 36 км со скоростью z -x, тогда $\frac{30}{z-y}=\frac{36}{z-x}$.

Время, за которое третий автомобиль догонит первый равно $\frac{30}{z-x}$. За это время третий автомобиль пройдёт относительно второго (30 - a) км, где a - искомая величина. Тогда $\frac{30}{z-x}=\frac{30-a}{z-y}$.

Разделим одно уравнение на другое так, чтобы знаменатели сокращались, и получим

$\frac{30}{30-a}=\frac{36}{30}$ и получим a = 5. Ответ: 5.