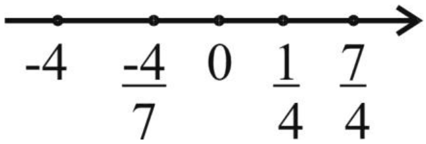
Решения

А1. Изобразим все данные числа на числовой оси.



То из них, которое расположено левее всех, и является наименьшим. Это число –4. **Ответ: 5.**

А2. Проанализируем неравенство. На числовой оси множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \le 6$ (x меньше или равно 6) – это множество всех чисел, лежащих левее числа $x = 6$, включая само это число.

Ответ: 3.

А3. Преобразуем одночлен. При этом вспомним, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются. Имеем:

$$\frac{1}{5}xy^6\cdot(-10)a^3x^5y^2 = \frac{1}{5}\cdot(-10)\cdot a^3\cdot x\cdot x^5\cdot y^6\cdot y^2 = -2a^3x^{1+5}y^{6+2} = -2a^3x^6y^8.$$

Ответ: 5.

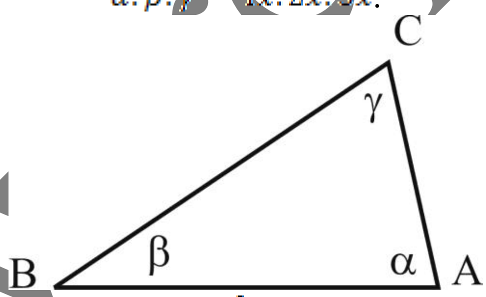
А4. Проведем преобразования выражения и последующие вычисления. Как правило, в таких примерах надо увидеть простое решение, позволяющее избежать сложных вычислений. Имеем:

$$(25\cdot1{,}4+25\cdot1{,}6):(-5) = 25\cdot(1{,}4+1{,}6):(-5) = 25\cdot3:(-5) = (25:(-5))\cdot3 = -5\cdot3 = -15.$$

Ответ: 3.

А5. Пусть углы треугольника равны α, β и γ. По условию они относятся как 4:2:3. Тогда

$$\alpha:\beta:\gamma = 4x:2x:3x.$$



Известно, что сумма углов треугольника равна 180°. Тогда

$$4x+2x+3x = 180^\circ,$$

или $9x = 180^\circ$, или $x = 20^\circ$. Тогда наибольший угол треугольника равен $\alpha = 4x = 80^\circ$.

Ответ: 5.

А6. Преобразуем выражение. Вначале разложим квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе, на множители:

$$x^2-8x+7 = (x-1)(x-7)$$

с помощью формулы разложения на множители квадратичного трёхчлена $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Теперь заметим в числителе разность квадратов:

$$(x-3)^2-16 = (x-3)^2-4^2 = \big((x-3)-4\big)\cdot\big((x-3)+4\big) = (x-7)(x+1).$$

Тогда исходная дробь сокращается следующим образом:

$$\frac{(x-3)^2-16}{x^2-8x+7} = \frac{(x-7)(x+1)}{(x-1)(x-7)} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Ответ: 4.

А7. Найдем 45% от 20. Вспомним, что 1% - это одна сотая часть числа, значит, 45% - это сорок пять сотых числа . Тогда 45% от 20 - это $\frac{45}{100} \cdot 20 = 9$

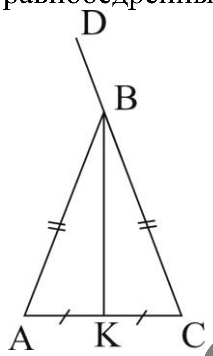
Теперь по условию 9 составляет 10% от числа А, т.е. число 9 равно десять сотых числа А. $9 = \frac{10}{100} \cdot A$, откуда $A = 90$. **Ответ: 2.**

А8. Преобразуем выражение:

$$3\operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) + 2 = 3\operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) + 2 = 3\operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 2 = 3\operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha + 2 = 3 + 2 = 5.$$

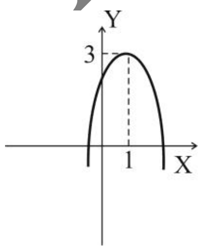
Ответ: 1.

А9. Из рисунка видно, что треугольник *ABC* равнобедренный.



Тогда его медиана *BK* является и биссектрисой. Раз так, то угол $ABC = 2CBK = 36^\circ$. Тогда, так как угол $CBD = 180^\circ$ развернутый, то угол $ABD = 180^\circ - ABC = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$. **Ответ: 5.**

А10. Мы знаем, что квадратичная функция задаётся уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Во-первых, обратим внимание, что ветви параболы направлены вниз. Это значит, что коэффициент а при x^2 отрицателен. Этому требованию удовлетворяют все варианты ответов. Координата *x* вершины параболы находится из формулы $x_B = \frac{-b}{2a}$.



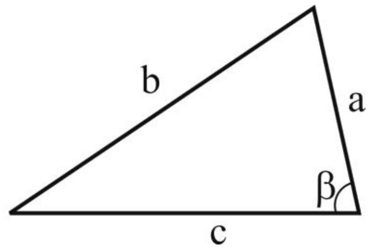
Тогда, так как координата вершины параболы по оси *X* равна 1, имеем $-\frac{b}{2a} = 1$, то есть $b = -2a$. Так как мы определили, что $a < 0$, то $b > 0$. Коэффициент b положителен только в вариантах 2 и 4. Осталось проверить, какой из них правильный. Из рисунка видно, что при $x = 1$ координата $y = 3$. Подставляем вместо *x* число 1 в варианты ответов 2 и 4 и находим y. Видно, что верный ответ $y = 3$ – вариант 4. **Ответ: 4.**

А11. Преобразуем выражение:

$$a^{\frac{2}{3}} : \left(\frac{1}{a}\right)^{1\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} : \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{2}{3}} : \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} = a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{4}{3}} = a^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)} = a^{\frac{6}{3}} = a^2.$$

При $a = 2$ имеем, что значение выражения равно 4. **Ответ: 4.**

А12. Известно, что больший угол лежит напротив большей стороны треугольника. Пусть стороны треугольника $a = 2\sqrt{3}$, $c = 9$, $b = 7\sqrt{3}$. Наибольший угол треугольника β лежит напротив стороны $b = 7\sqrt{3}$.



Применим для его определения теорему косинусов. Имеем:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Подставим численные данные:

$$147 = 12 + 81 - 36\sqrt{3}\cos\beta.$$

Выражаем

$$\cos\beta = \frac{12+81-147}{36\sqrt{3}} = -\frac{54}{36\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из того, что косинус угла отрицателен, следует, что угол β тупой. Известно, что $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$\cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, $\beta = 150^\circ$. **Ответ: 2.**

А13. Преобразуем выражение, Для этого используем основное тригонометрическое тождество в числителе и знаменателе дроби. Имеем:

$$\frac{5\sin^2\alpha - 4}{1+3\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{5\sin^2\alpha - 4(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos^2\alpha$. Имеем:

$$\frac{\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 4}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1+3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 4}{\operatorname{tg}^2\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha + 1} = \frac{9-4}{9-9+1} = 5.$$

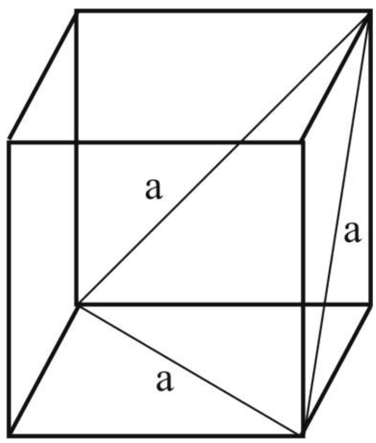
Ответ: 3.

А14. Заметим, что в задачах такого типа совершенно не надо решать квадратное уравнение. Достаточно применить теорему Виета. По теореме Виета произведение корней квадратного уравнения равно $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, а сумма корней $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. В нашем случае

$$x_1x_2 = -\frac{1}{2}, \text{ а } x_1 + x_2 = -\frac{3}{4}.$$

Если корни уравнения увеличатся в 4 раза, то сумма корней нового уравнения тоже увеличится в 4 раза, а их произведение возрастет в 16 раз. Тогда для корней нового уравнения будем иметь: $x_1x_2 = -8$, а $x_1 + x_2 = -3$. Значит, новое квадратное уравнение примет вид: $x^2 + 3x - 8 = 0$. **Ответ: 1.**

А15. Заметим, что сечение имеет форму треугольника, причем все стороны этого треугольника есть диагонали боковых граней куба. Поэтому сечение – это равносторонний треугольник, площадь которого равна $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a – сторона треугольника.



Сторона треугольника есть диагональ боковой грани куба, следовательно, $a = b\sqrt{2}$, где b – ребро куба. Имеем:

$$a = b\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 20.$$

Тогда

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{400\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}.$$

Ответ: 1.

А16. Преобразуем выражение:

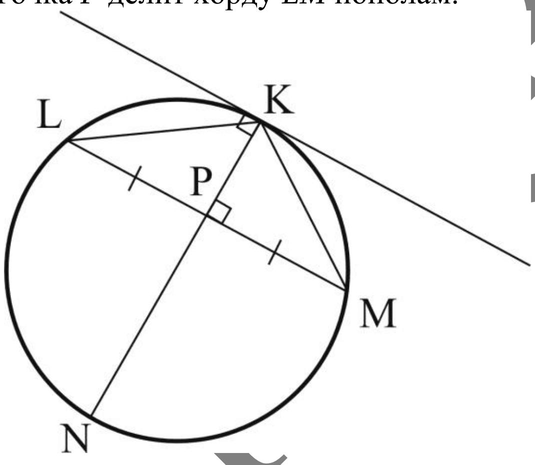
$$\sqrt{48a^6} = \sqrt{16\cdot 3(a^3)^2} = 4\sqrt{3}|a^3|.$$

Поскольку по условию $a < 0$, то и $a^3 < 0$. Тогда

$$4\sqrt{3}|a^3| = -4\sqrt{3}a^3.$$

Ответ: 2.

А17. Проведем из точки *K* диаметр *KN*. Пусть он пересекает хорду *LM* в точке *P*. Диаметр перпендикулярен касательной в точке *K*. Тогда, поскольку хорда *LM* параллельна касательной, то *LM* перпендикулярна диаметру *KN*. Точка *P* делит хорду *LM* пополам.



Тогда

$$MP = PL = 4\sqrt{2}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник MPK. По теореме Пифагора

$$KP = \sqrt{KM^2 - MP^2} = \sqrt{36-32} = 2.$$

Используем свойство двух пересекающихся хорд. Известно, что произведения отрезков двух пересекающихся хорд равны. Тогда $NP\cdot KP = MP\cdot PL$, то есть

$$(2R-2)\cdot 2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2.$$

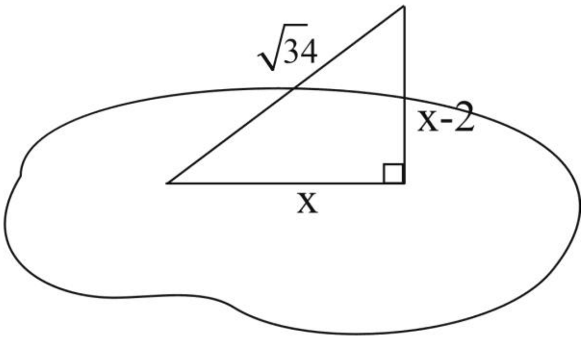
Отсюда $R = 9$. **Ответ: 2.**

А18. Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю.
Решим уравнение $x^2 - 3x - 10 = 0$. Корни $x_1 = 5$, $x_2 = -2$.
Решим уравнение $x^2 + 3x - 10 = 0$. Корни $x_3 = -5$, $x_4 = 2$.

Учтём, что подкоренные выражения неотрицательны $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \ge 0 \\ x^2 + 3x - 10 \ge 0 \end{cases}$.

Каждый корень должен удовлетворять каждому из неравенств. После проверки получаем, что корнями являются $x = \pm 5$. **Ответ: 3.**

В1. Перпендикуляр, наклонная и ее проекция образуют прямоугольный треугольник, причем наклонная – это гипотенуза треугольника. Пусть длина проекции равна x, тогда длина перпендикуляра $x - 2$.



Запишем теорему Пифагора. Имеем:

$$34 = x^2 + (x-2)^2.$$

Решая полученное уравнение, получаем $x = 5$.
Ответ: 5.

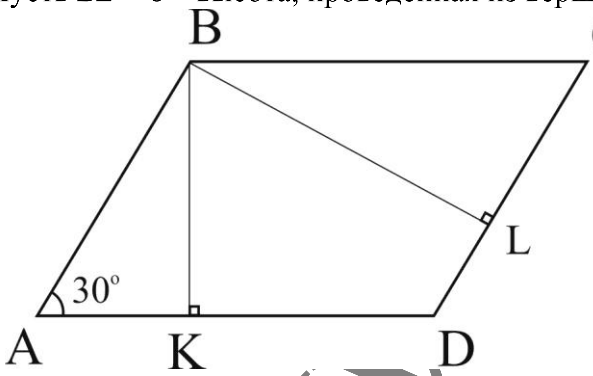
B2. Преобразуем выражение наиболее рациональным способом:

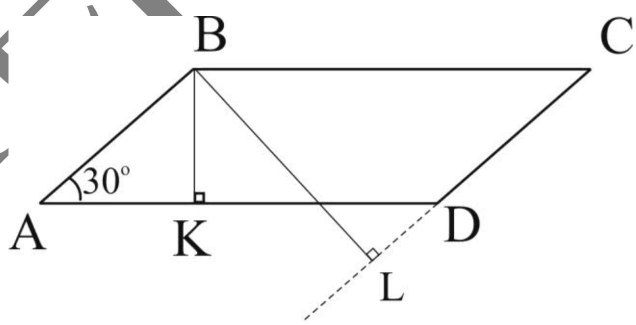
$$\frac{22\cdot\sqrt[8]{12}\cdot\sqrt{12\cdot\sqrt[8]{12}}}{\left(\sqrt[4]{144}-1\right)\left(\sqrt[4]{144}+1\right)} = \frac{22\cdot 12^{\frac{1}{8}}\cdot\left(12\cdot 12^{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(144^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(144^{\frac{1}{4}}-1\right)} = \frac{22\cdot 12^{\frac{1}{8}}\cdot\left(12^{\frac{4}{8}}\right)^{\frac{1}{2}}}{144^{\frac{1}{2}}-1} = \frac{22\cdot 12^{\frac{1}{8}}\cdot 12^{\frac{2}{8}}}{\sqrt{144}-1} = \frac{22\cdot 12}{12-1} = \frac{22\cdot 12}{11} = 2\cdot 12 = 24$$

.

Ответ: 24.

B3. Пусть *ABCD* – параллелограмм. Пусть *BK* = 3 – высота, проведенная из вершины *B* к основанию AD. Пусть *BL* = 6 – высота, проведенная из вершины *B* к стороне *CD*. По условию угол *A* равен $\alpha = 30^\circ$.





Из прямоугольного треугольника *ABK* имеем *AB* = 6, так как сторона *BK* лежит напротив угла 30°, а *AB* – гипотенуза. Аналогично из прямоугольного треугольника *BCL* имеем *BC* = 12. Площадь параллелограмма равна произведению его сторон на синус угла между ними

$$S = AB\cdot AD\cdot\sin\alpha = 6\cdot 12\cdot\frac{1}{2} = 36.$$

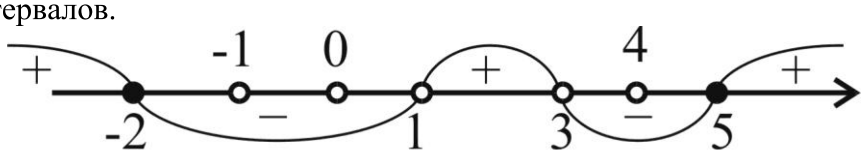
Ответ: 36.

B4. Вначале заметим, что эта функция – квадратичная функция, график которой представляет собой параболу. Найти наименьшее значение функции – значит найти самую низкую точку на на участке графика, соответствующем отрезку из условия.. Заметим, что коэффициент при x^2 равен 1, т.е. больше нуля, значит, ветви параболы направлены вверх. Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3$. Заметим, что $x_0 = -3$ входит в отрезок $[-4;3]$. Раз ветви параболы направлены вверх, то самая низкая точка на ее графике – ее вершина, ордината которой $y_0 = y(x_0) = -9$. Поэтому наименьшее значение функции на отрезке $[-4;3]$ *равно* -9.
Ответ: -9.

B5. Найдем область определения функции, зная, что подкоренное выражение неотрицательно. Для этого решим неравенство

$$1-\frac{x-13}{4x-3-x^2}\geq 0,$$
$$\frac{4x-3-x^2-x+13}{4x-3-x^2}\geq 0,$$
$$\frac{-x^2+3x+10}{-x^2+4x-3}\geq 0,$$
$$\frac{-(x-5)(x+2)}{-(x-3)(x-1)}\geq 0,$$
$$\frac{(x-5)(x+2)}{(x-3)(x-1)}\geq 0.$$

Решаем методом интервалов.

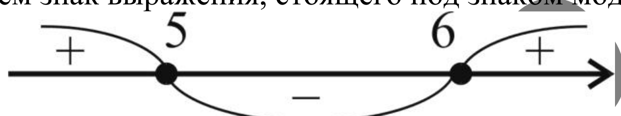


Из диаграммы видно, что в область определения функции не входят целые значения *x*, равные –1, 0, 1, 3, 4. Их сумма равна 7. **Ответ:** 7.

B6. Преобразуем уравнение, не забыв про ОДЗ: $x \neq 1$. Имеем:

$$\frac{|x^2-11x+30|}{1-x}=x^2-12x+36,$$
$$\frac{|(x-5)(x-6)|}{1-x}=(x-6)^2,$$

Методом интервалов исследуем знак выражения, стоящего под знаком модуля.



После этого аккуратно раскрываем модуль. Итак, рассмотрим все случаи:

а) $x\leq 5$ или $x\geq 6$. Тогда выражение под знаком модуля $x^2-11x+30\geq 0$. Имеем:

$$\frac{(x-5)(x-6)}{1-x}=(x-6)^2,$$
$$(x-5)(x-6)=(x-6)^2(1-x),$$
$$(x-5)(x-6)-(x-6)^2(1-x)=0,$$
$$(x-6)\big((x-5)+(x-6)(x-1)\big)=0,$$
$$(x-6)(x^2-6x+1)=0.$$

Решениями этого уравнения являются $x=6$ или $x=3\pm 2\sqrt{2}$. Неравенствам $x\leq 5$ или $x\geq 6$ удовлетворяет корень $x=6$ и $x=3-2\sqrt{2}$.

б) $5<x<6$. Тогда выражение под знаком модуля $x^2-11x+30<0$. Имеем:

$$\frac{-(x-5)(x-6)}{1-x}=(x-6)^2,$$
$$-(x-5)(x-6)=(x-6)^2(1-x),$$
$$(x-5)(x-6)=(x-6)^2(x-1),$$
$$(x-5)(x-6)-(x-6)^2(x-1)=0,$$
$$(x-6)\big((x-5)-(x-6)(x-1)\big)=0,$$
$$(x-6)(-x^2+8x-11)=0.$$

Решениями этого уравнения являются $x=6$ или $x=4\pm\sqrt{5}$. Неравенству $5<x<6$ не удовлетворяет ни одно из них.

Тогда больший корень уравнения $x=6$, а количество корней 2.

Ответ: 12.

B7. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

Например, найдем сумму первых ста членов прогрессии $S_{100}=\frac{a_1+a_{100}}{2}\cdot 100$.

Формула для нахождения n - го члена прогрессии:

$$a_n=a_1+d\cdot(n-1).$$

Тогда $a_{100} = a_1 + d \cdot (100 - 1) = a_1 + 99 \cdot d$.

Подставим в формулу суммы прогрессии и получим $S_{100} = \frac{a_1 + a_1 + 99 \cdot d}{2} \cdot 100$ **или** $S_{100} = 100 \cdot a_1 + 4950 \cdot d$.

По условию $100a_1 + 4950d = 100$,
тогда

$$2a_1 + 99d = 2.$$

После аналогичных преобразований для суммы первых 200 членов прогрессии получаем:

$$2a_1 + 199d = 4.$$

Объединяем полученные уравнения в систему, получаем:

$$\begin{cases} 2a_1 + 99d = 2, \\ 2a_1 + 199d = 4 \end{cases}.$$

Решаем ее, получаем:

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}01, \\ d = 0{,}02 \end{cases}.$$

Теперь запишем искомую сумму первых 50 членов прогрессии. Она равна: $S_{100} = 50 \cdot a_1 + 1225 \cdot d = 25$.

Ответ: 25.

B8. Рекомендую скачать у меня с сайта www.repet.by тему «Уравнения» (она в свободном доступе) и внимательно изучить все темы, разобранные в ней.

В уравнениях такого типа надо найти наиболее выгодный способ группировки множителей. Преобразуем уравнение:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24,$$
$$\big((x+1)(x+4)\big) \cdot \big((x+3)(x+2)\big) = 24,$$
$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) = 24.$$

Проведем замену переменных. Пусть $x^2 + 5x = t$. Тогда $(t+4)(t+6) = 24$, $t = 0$ или $t = -10$. Имеем совокупность двух уравнений:

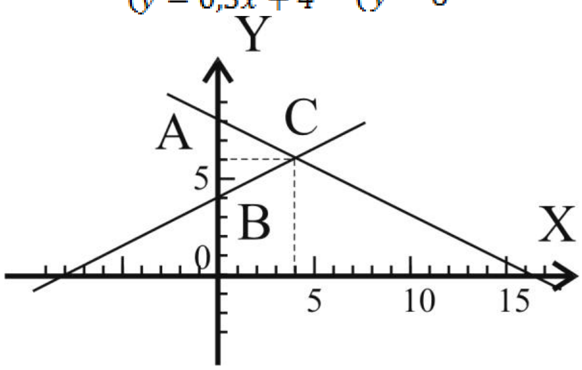
$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 5x = 0, \\ x^2 + 5x = -10 \end{array}\right..$$

Решая ее, получаем $x = 0$ или $x = -5$. Второе уравнение корней не имеет.

Ответ: –5.

B9. Построим фигуру на координатной плоскости. Все линии в условии – прямые. Поэтому фигура – треугольник. Найдем координаты вершин треугольника. Пусть *A* – вершина, полученная в точке пересечения оси ординат с прямой $x = 16 - 2y$. Для определения ее координат необходимо приравнять $x = 0$ (так как любая точка на оси ординат имеет координату $x = 0$). Получаем $16 - 2y = 0$, откуда $y = 8$. Итак, точка *A* имеет координаты (0;8). Пусть *B* – вершина в точке пересечения оси ординат и прямой $y = 0{,}5x + 4$. Аналогично приравниваем $x = 0$ и имеем $y = 4$. Итак, координаты точки *B* (0;4). Найдем координаты точки *C*, точки пересечения прямых $x = 16 - 2y$ и $y = 0{,}5x + 4$. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = 16 - 2y, \\ y = 0{,}5x + 4 \end{cases}. \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 6 \end{cases}.$$



Итак, рассмотрим полученный треугольник. Его площадь можно найти как полупроизведение основания на высоту, опущенную на это основание. Удобнее всего рассмотреть основание $AB = 4$ и опущенную на него высоту $CH = 4$. Тогда $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

Ответ: 8.

B10. Пусть искомая скорость третьей машины равна x. Спустя время t после выезда третьей машины она догнала первую. К этому моменту времени первая и третья машины прошли одинаковый путь. Это значит, что

$$xt = 40(t + 0{,}5), \Rightarrow xt = 40t + 20.$$

Здесь учтено, что первая машина движется на полчаса больше третьей.
Спустя время $t + 1{,}5$ после выезда третья машина догнала вторую. К этому моменту вторая и третья машины прошли одинаковый путь. То есть

$$x(t + 1{,}5) = 50(t + 1{,}5 + 0{,}5), \Rightarrow x(t + 1{,}5) = 50t + 100.$$

Здесь также учтено, что вторая машина движется на полчаса больше третьей.
Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} xt = 40t + 20, \\ x(t + 1{,}5) = 50t + 100 \end{cases}.$$
$$\begin{cases} t = 1, \\ x = 60 \end{cases}.$$

Ответ: 60.

B11. Преобразуем уравнение. Имеем:

$$\sin^3 x - 3\cos^2 x \cdot \sin x + 0{,}5 \sin x \cdot \sin 2x - 3\cos^3 x = 0,$$
$$\sin^3 x - 3\cos^2 x \cdot \sin x + 0{,}5 \sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^3 x = 0,$$
$$\sin^3 x - 3\cos^2 x \cdot \sin x + \sin^2 x \cdot \cos x - 3\cos^3 x = 0,$$
$$\sin x \cdot (\sin^2 x - 3\cos^2 x) + \cos x \cdot (\sin^2 x - 3\cos^2 x) = 0,$$
$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - 3\cos^2 x) = 0, \Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)(\sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x)) = 0,$$
$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x\right)(4\sin^2 x - 3) = 0, \Rightarrow 4\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Это уравнение имеет три возможных решения. Разберем их по очереди.

1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Корни этого уравнения задаются формулой $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$. Промежутку $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ из этих корней принадлежат $x = \frac{3\pi}{4}$ и $x = \frac{7\pi}{4}$.

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Корни этого уравнения задаются формулой $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$. Промежутку $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ из этих корней принадлежат $x = \frac{4\pi}{3}$ и $x = \frac{5\pi}{3}$.

3) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Корни этого уравнения задаются формулой $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$. Промежутку $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ из этих корней принадлежат $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$ и $x = \frac{7\pi}{3}$.

Всего уравнение на заданном промежутке имеет 7 корней. **Ответ: 7.**
Заметим, что уравнение $(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - 3\cos^2 x) = 0$ можно решать и другим способом. Действительно, произведение равно нулю, если один из сомножителей равен нулю. Получаем один из следующих вариантов:

1) $\sin x + \cos x = 0$.

Разделим обе части этого уравнения на $\cos x$. Получим:

$$\mathrm{tg} x + 1 = 0, \Rightarrow \mathrm{tg} x = -1, \Rightarrow x = \mathrm{arctg}(-1) + \pi k, k \in Z, \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

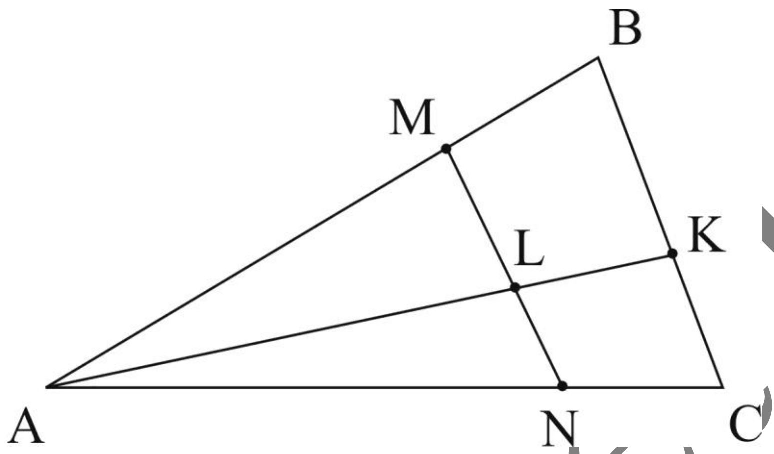
2) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$. Разделим оде части этого уравнения на $\cos^2 x$. Получим:

$$\mathrm{tg}^2\, x - 3 = 0, \Rightarrow \mathrm{tg}^2\, x = 3,$$

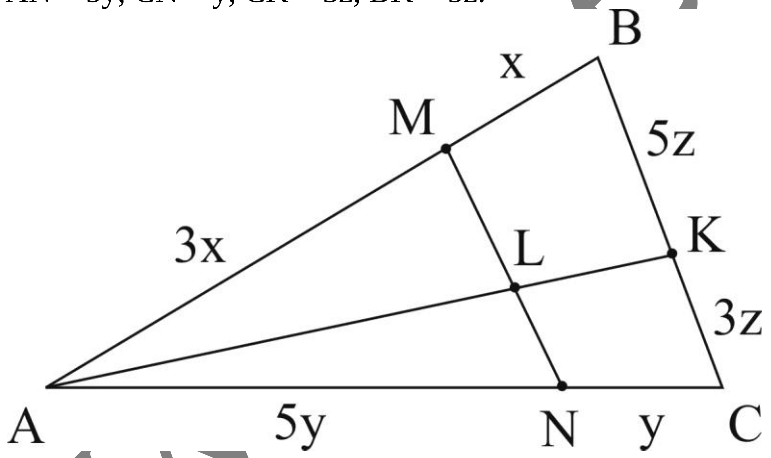
$$\mathrm{tg}x = \pm\sqrt{3}, \Rightarrow x = \mathrm{arctg}\left(\pm\sqrt{3}\right) + \pi k, k \in Z, \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$$

Видно, что получается такое же множество решений.

B12. Точки M,N,K расположены соответственно на сторонах AB, AC, BC треугольника ABC так, что AM: MB =3:1, AN : NC= 5:1, CK : KB= 3:5 Отрезки AK и MN пересекаются в точке L Найдите отношение AL/LK

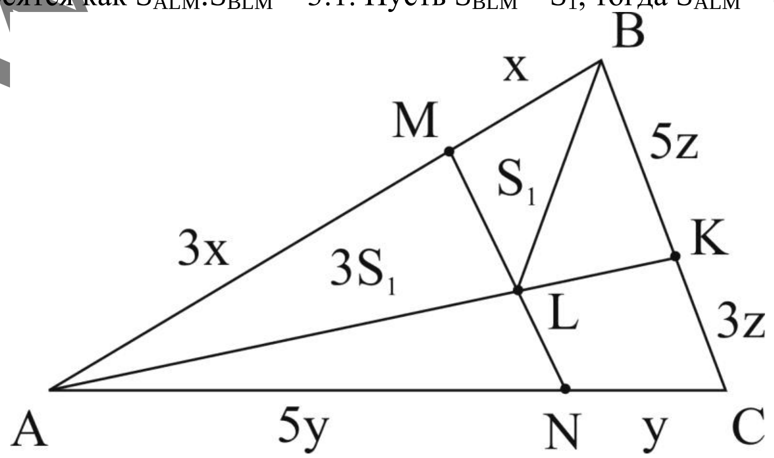


Пусть AM = 3x, BM = x, AN = 5y, CN = y, CK = 3z, BK = 5z.

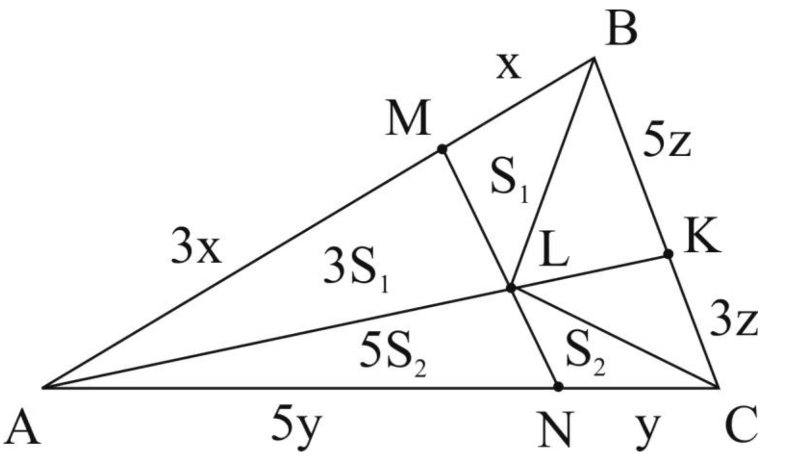


Сделаем дополнительное построение. Проведем отрезок BL.

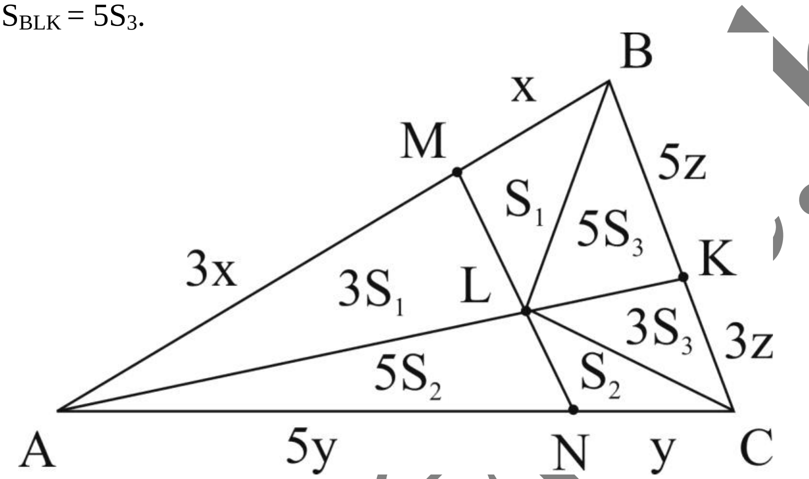
Рассмотрим треугольники ALM и BLM. У них общая высота (на рисунке она не показана для того, чтобы не загромождать его), а основания относятся как AM:MB = 3:1. Тогда площади треугольников ALM и BLM также относятся как S_{ALM}:S_{BLM} = 3:1. Пусть $S_{BLM} = S_1$, тогда $S_{ALM} = 3S_1$.



Сделаем ещё одно дополнительное построение. Проведем отрезок CL Теперь рассмотрим треугольники ALN и CLN. Рассуждая аналогично, получим, что S_{ALN} : S_{CLN} = 5:1. Пусть $S_{CLN} = S_2$, тогда $S_{ALN} = 5S_2$.



Наконец, рассмотрим треугольники CLK и BLK. Рассуждая аналогично, получим, что $S_{CLK}:S_{BLK} = 3:5$. Пусть $S_{CLK} = 3S_3$, тогда $S_{BLK} = 5S_3$.



Аналогично можно найти соотношение площадей треугольников ABK и ACK. Имеем:

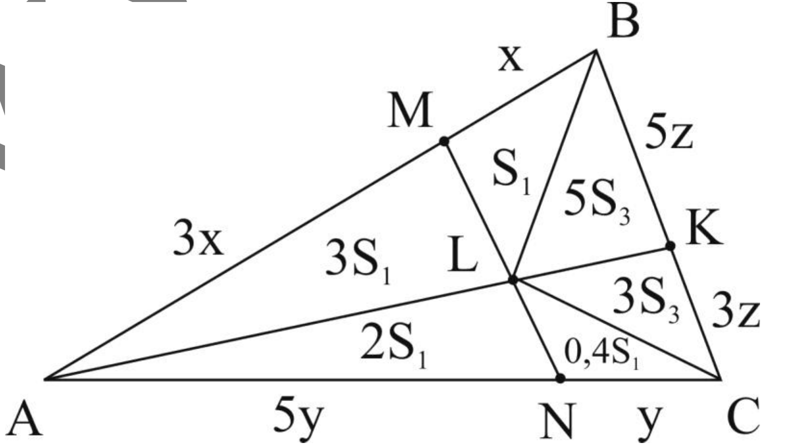
$$\frac{S_{ABK}}{S_{ACK}} = \frac{5}{3}.$$

Распишем площади треугольников ABK и ACK. Получим:

$$\frac{3S_1 + S_1 + 5S_3}{5S_2 + S_2 + 3S_3} = \frac{5}{3}.$$

Преобразуя это выражение, получаем:

$$2S_1 = 5S_2.$$



Теперь рассмотрим треугольник AMN. С одной стороны, его площадь равна $S_{AMN} = 5S_1$, а с другой

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin\angle A,$$

$$5S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 5y \cdot \sin\angle A.$$

Площадь всего треугольника ABC, с одной стороны, равна $S_{ABC} = \frac{32}{5}S_1 + 8S_3$, а с другой

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle A,$$

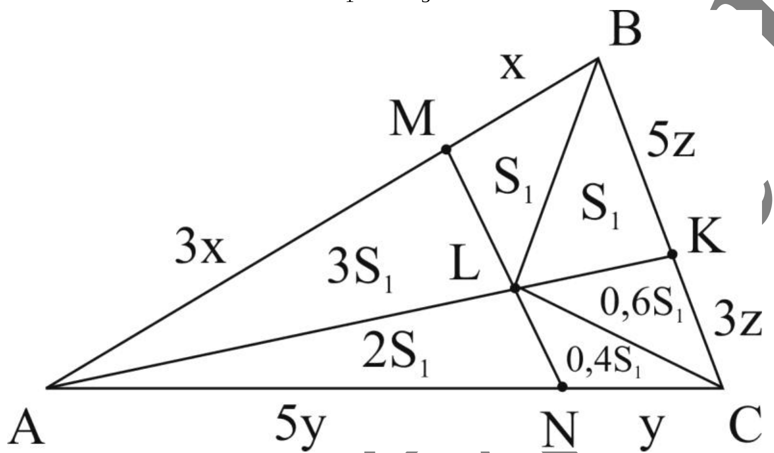
$$\frac{32}{5}S_1 + 8S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 6y \cdot \sin\angle A.$$

Разделим одно уравнение на другое. Получим:

$$\frac{5S_1}{\frac{32}{5}S_1 + 8S_3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 5y \cdot \sin\angle A}{\frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 6y \cdot \sin\angle A} \Rightarrow \frac{5S_1}{\frac{32}{5}S_1 + 8S_3} = \frac{5}{8}$$

откуда

$$S_1 = 5S_3.$$



Наконец, рассмотрим треугольники ABL и KBL. У них общая высота. Так как их площади относятся как S_{ABL}:A_{KBL} = 4:1, то и их основания относятся в том же отношении, то есть AL : KL = 4:1.

Ответ: 4.