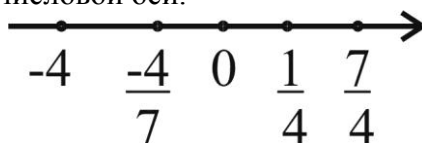


Решения

A1. Изобразим все данные числа на числовой оси.



То из них, которое расположено левее всех, и является наименьшим. Это число -4 . **Ответ: 5.**

A2. Проанализируем неравенство. На числовой оси множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \leq 6$ (x меньше или равно 6) – это множество всех чисел, лежащих левее числа $x = 6$, включая само это число.



Ответ: 3.

A3. Преобразуем одночлен. При этом вспомним, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются. Имеем:

$$\frac{1}{5}xy^6 \cdot (-10)a^3x^5y^2 = \frac{1}{5} \cdot (-10) \cdot a^3 \cdot x \cdot x^5 \cdot y^6 \cdot y^2 = -2a^3x^{1+5}y^{6+2} = -2a^3x^6y^8.$$

Ответ: 5.

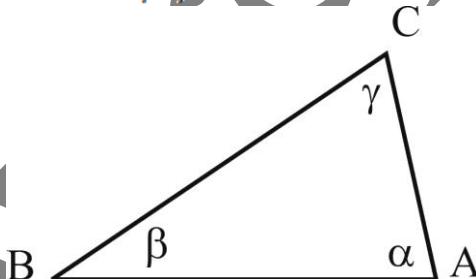
A4. Проведем преобразования выражения и последующие вычисления. Как правило, в таких примерах надо увидеть простое решение, позволяющее избежать сложных вычислений. Имеем:

$$(25 \cdot 1,4 + 25 \cdot 1,6) : (-5) = 25 \cdot (1,4 + 1,6) : (-5) = 25 \cdot 3 : (-5) = (25 : (-5)) \cdot 3 = -5 \cdot 3 = -15.$$

Ответ: 3.

A5. Пусть углы треугольника равны α , β и γ . По условию они относятся как 4:2:3. Тогда

$$\alpha : \beta : \gamma = 4x : 2x : 3x.$$



Известно, что сумма углов треугольника равна 180° . Тогда

$$4x + 2x + 3x = 180^\circ,$$

или $9x = 180^\circ$, или $x = 20^\circ$. Тогда наибольший угол треугольника равен $\alpha = 4x = 80^\circ$.

Ответ: 5.

A6. Преобразуем выражение. Вначале разложим квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе, на множители:

$$x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$$

с помощью формулы разложения на множители квадратичного трёхчлена $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Теперь заметим в числителе разность квадратов:

$$(x - 3)^2 - 16 = (x - 3)^2 - 4^2 = ((x - 3) - 4) \cdot ((x - 3) + 4) = (x - 7)(x + 1).$$

Тогда исходная дробь сокращается следующим образом:

$$\frac{(x-3)^2-16}{x^2-8x+7} = \frac{(x-7)(x+1)}{(x-1)(x-7)} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Ответ: 4.

A7. Найдем 45% от 20. Вспомним, что 1% - это одна сотая часть числа, значит, 45% - это сорок пять сотых числа. Тогда 45% от 20 - это $\frac{45}{100} \cdot 20 = 9$

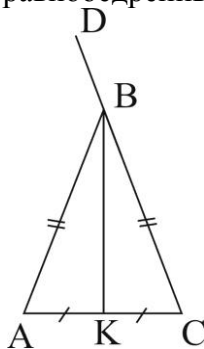
Теперь по условию 9 составляет 10% от числа A , т.е. число 9 равно десять сотых числа A . $9 = \frac{10}{100} \cdot A$, откуда $A = 90$. **Ответ: 2.**

A8. Преобразуем выражение:

$$3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) + 2 = 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \left(\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) + 2 = 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 = 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 = 3 + 2 = 5.$$

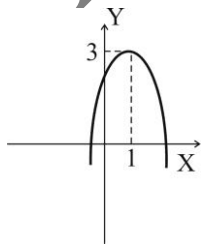
Ответ: 1.

A9. Из рисунка видно, что треугольник ABC равнобедренный.



Тогда его медиана BK является и биссектрисой. Раз так, то угол $ABC = 2CBK = 36^\circ$. Тогда, так как угол $CBD = 180^\circ$ развернутый, то угол $ABD = 180^\circ - ABC = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$. **Ответ: 5.**

A10. Мы знаем, что квадратичная функция задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$. Во-первых, обратим внимание, что ветви параболы направлены вниз. Это значит, что коэффициент a при x^2 отрицателен. Этому требованию удовлетворяют все варианты ответов. Координата x вершины параболы находится из формулы $x_B = \frac{-b}{2a}$.



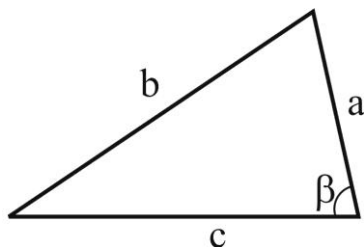
Тогда, так как координата вершины параболы по оси X равна 1, имеем $-\frac{b}{2a} = 1$, то есть $b = -2a$. Так как мы определили, что $a < 0$, то $b > 0$. Коэффициент b положителен только в вариантах 2 и 4. Осталось проверить, какой из них правильный. Из рисунка видно, что при $x = 1$ координата $y = 3$. Подставляем вместо x число 1 в варианты ответов 2 и 4 и находим y . Видно, что верный ответ $y = 3$ - вариант 4. **Ответ: 4.**

A11. Преобразуем выражение:

$$a^{\frac{2}{3}} : \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} : \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{2}{3}} : \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} = a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{4}{3}} = a^{\frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right)} = a^{\frac{6}{3}} = a^2.$$

При $a = 2$ имеем, что значение выражения равно 4. **Ответ: 4.**

A12. Известно, что больший угол лежит напротив большей стороны треугольника. Пусть стороны треугольника $a = 2\sqrt{3}$, $c = 9$, $b = 7\sqrt{3}$. Наибольший угол треугольника β лежит напротив стороны $b = 7\sqrt{3}$.



Применим для его определения теорему косинусов. Имеем:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

Подставим численные данные:

$$147 = 12 + 81 - 36\sqrt{3} \cos \beta.$$

Выражаем

$$\cos \beta = \frac{12+81-147}{36\sqrt{3}} = -\frac{54}{36\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из того, что косинус угла отрицателен, следует, что угол β тупой. Известно, что $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$\cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, $\beta = 150^\circ$. **Ответ: 2.**

A13. Преобразуем выражение, Для этого используем основное тригонометрическое тождество в числителе и знаменателе дроби. Имеем:

$$\frac{5 \sin^2 \alpha - 4}{1 + 3 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{5 \sin^2 \alpha - 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 \alpha$. Имеем:

$$\frac{\sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 4}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 + 3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 4}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{9 - 4}{9 - 9 + 1} = 5.$$

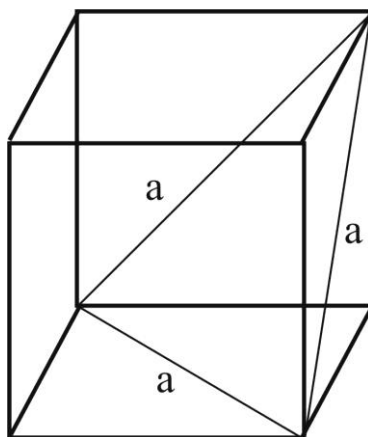
Ответ: 3.

A14. Заметим, что в задачах такого типа совершенно не надо решать квадратное уравнение. Достаточно применить теорему Виета. По теореме Виета произведение корней квадратного уравнения равно $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, а сумма корней $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. В нашем случае

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{2}, \text{ а } x_1 + x_2 = -\frac{3}{4}.$$

Если корни уравнения увеличатся в 4 раза, то сумма корней нового уравнения тоже увеличится в 4 раза, а их произведение возрастет в 16 раз. Тогда для корней нового уравнения будем иметь: $x_1 x_2 = -8$, а $x_1 + x_2 = -3$. Значит, новое квадратное уравнение примет вид: $x^2 + 3x - 8 = 0$. **Ответ: 1.**

A15. Заметим, что сечение имеет форму треугольника, причем все стороны этого треугольника есть диагонали боковых граней куба. Поэтому сечение – это равносторонний треугольник, площадь которого равна $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, где a – сторона треугольника.



Сторона треугольника есть диагональ боковой грани куба, следовательно, $a = b\sqrt{2}$, где b – ребро куба. Имеем:

$$a = b\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20.$$

Тогда

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{400\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}.$$

Ответ: 1.

A16. Преобразуем выражение:

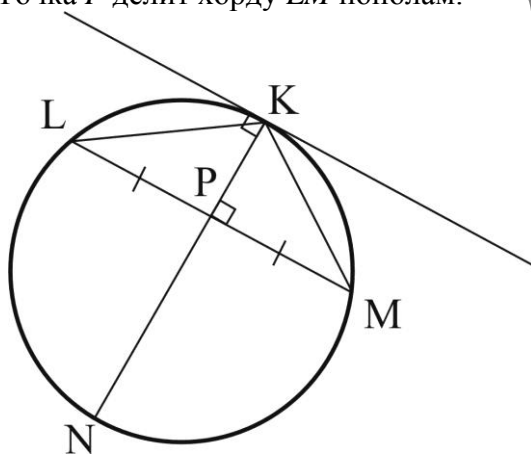
$$\sqrt{48a^6} = \sqrt{16 \cdot 3(a^3)^2} = 4\sqrt{3}|a^3|.$$

Поскольку по условию $a < 0$, то и $a^3 < 0$. Тогда

$$4\sqrt{3}|a^3| = -4\sqrt{3}a^3.$$

Ответ: 2.

A17. Проведем из точки K диаметр KN . Пусть он пересекает хорду LM в точке P . Диаметр перпендикулярен касательной в точке K . Тогда, поскольку хорда LM параллельна касательной, то LM перпендикулярна диаметру KN . Точка P делит хорду LM пополам.



Тогда

$$MP = PL = 4\sqrt{2}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник MPK . По теореме Пифагора

$$KP = \sqrt{KM^2 - MP^2} = \sqrt{36 - 32} = 2.$$

Используем свойство двух пересекающихся хорд. Известно, что произведения отрезков двух пересекающихся хорд равны. Тогда $NP \cdot KP = MP \cdot PL$, то есть

$$(2R - 2) \cdot 2 = (4\sqrt{2})^2.$$

Отсюда $R = 9$. **Ответ: 2.**

A18. Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю.

Решим уравнение $x^2 - 3x - 10 = 0$. Корни $x_1 = 5$, $x_2 = -2$.

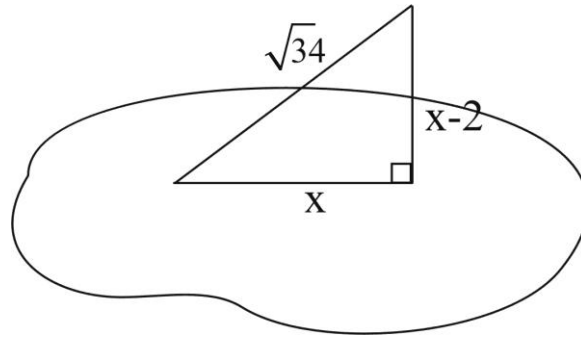
Решим уравнение $x^2 + 3x - 10 = 0$. Корни $x_3 = -5$, $x_4 = 2$.

Учтём, что подкоренные выражения неотрицательны

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 10 \geq 0 \end{cases}$$

Каждый корень должен удовлетворять каждому из неравенств. После проверки получаем, что корнями являются $x = \pm 5$. **Ответ: 3.**

B1. Перпендикуляр, наклонная и ее проекция образуют прямоугольный треугольник, причем наклонная – это гипотенуза треугольника. Пусть длина проекции равна x , тогда длина перпендикуляра $x - 2$.



Запишем теорему Пифагора. Имеем:

$$34 = x^2 + (x - 2)^2.$$

Решая полученное уравнение, получаем $x = 5$.

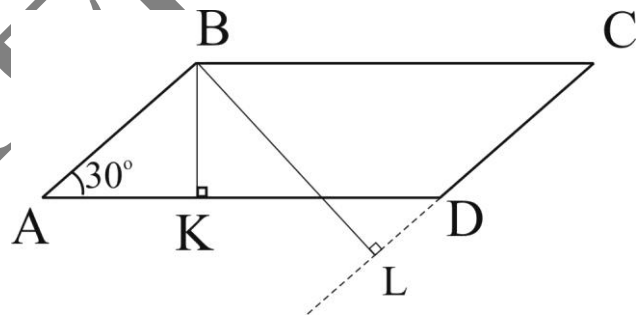
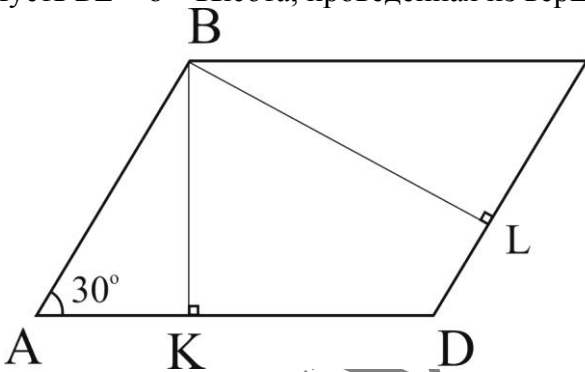
Ответ: 5.

В2. Преобразуем выражение наиболее рациональным способом:

$$\frac{22 \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt{12 \cdot \sqrt[3]{12}}}{(\sqrt[4]{144} - 1)(\sqrt[4]{144} + 1)} = \frac{22 \cdot 12^{\frac{1}{3}} \cdot (12 \cdot 12^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{(144^{\frac{1}{4}} - 1)(144^{\frac{1}{4}} + 1)} = \frac{22 \cdot 12^{\frac{1}{3}} \cdot (12^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}}{144^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{22 \cdot 12^{\frac{1}{3}} \cdot 12^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{144} - 1} = \frac{22 \cdot 12}{12 - 1} = \frac{22 \cdot 12}{11} = 2 \cdot 12 = 24$$

Ответ: 24.

В3. Пусть $ABCD$ – параллелограмм. Пусть $BK = 3$ – высота, проведенная из вершины B к основанию AD . Пусть $BL = 6$ – высота, проведенная из вершины B к стороне CD . По условию угол A равен $\alpha = 30^\circ$.



Из прямоугольного треугольника ABK имеем $AB = 6$, так как сторона BK лежит напротив угла 30° , а AB – гипотенуза. Аналогично из прямоугольного треугольника BCL имеем $BC = 12$. Площадь параллелограмма равна произведению его сторон на синус угла между ними

$$S = AB \cdot AD \cdot \sin \alpha = 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 36.$$

Ответ: 36.

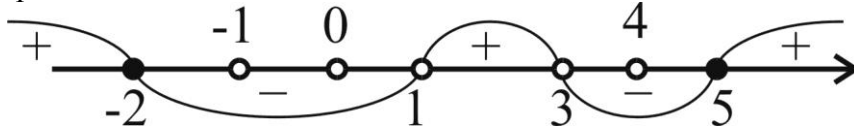
В4. Вначале заметим, что эта функция – квадратичная функция, график которой представляет собой параболу. Найти наименьшее значение функции – значит найти самую низкую точку на участке графика, соответствующем отрезку из условия. Заметим, что коэффициент при x^2 равен 1 , т.е. больше нуля, значит, ветви параболы направлены вверх. Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3$. Заметим, что $x_0 = -3$ входит в отрезок $[-4; 3]$. Раз ветви параболы направлены вверх, то самая низкая точка на ее графике – ее вершина, ордината которой $y_0 = y(x_0) = -9$. Поэтому наименьшее значение функции на отрезке $[-4; 3]$ равно -9 .

Ответ: -9 .

В5. Найдем область определения функции, зная, что подкоренное выражение неотрицательно. Для этого решим неравенство

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{x-13}{4x-3-x^2} &\geq 0, \\
 \frac{4x-3-x^2-x+13}{4x-3-x^2} &\geq 0, \\
 \frac{-x^2+3x+10}{-x^2+4x-3} &\geq 0, \\
 \frac{-(x-5)(x+2)}{-(x-3)(x-1)} &\geq 0, \\
 \frac{(x-5)(x+2)}{(x-3)(x-1)} &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Решаем методом интервалов.



Из диаграммы видно, что в область определения функции не входят целые значения x , равные $-1, 0, 1, 3, 4$. Их сумма равна 7. **Ответ:** 7.

В6. Преобразуем уравнение, не забыв про ОДЗ: $x \neq 1$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{|x^2-11x+30|}{1-x} &= x^2 - 12x + 36, \\
 \frac{|(x-5)(x-6)|}{1-x} &= (x-6)^2,
 \end{aligned}$$

Методом интервалов исследуем знак выражения, стоящего под знаком модуля.



После этого аккуратно раскрываем модуль. Итак, рассмотрим все случаи:

а) $x \leq 5$ или $x \geq 6$. Тогда выражение под знаком модуля $x^2 - 11x + 30 \geq 0$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{(x-5)(x-6)}{1-x} &= (x-6)^2, \\
 (x-5)(x-6) &= (x-6)^2(1-x), \\
 (x-5)(x-6) - (x-6)^2(1-x) &= 0, \\
 (x-6)((x-5) + (x-6)(x-1)) &= 0, \\
 (x-6)(x^2 - 6x + 1) &= 0.
 \end{aligned}$$

Решениями этого уравнения являются $x = 6$ или $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Неравенствам $x \leq 5$ или $x \geq 6$ удовлетворяет корень $x = 6$ и $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

б) $5 < x < 6$. Тогда выражение под знаком модуля $x^2 - 11x + 30 < 0$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{-(x-5)(x-6)}{1-x} &= (x-6)^2, \\
 -(x-5)(x-6) &= (x-6)^2(1-x), \\
 (x-5)(x-6) &= (x-6)^2(x-1), \\
 (x-5)(x-6) - (x-6)^2(x-1) &= 0, \\
 (x-6)((x-5) - (x-6)(x-1)) &= 0, \\
 (x-6)(-x^2 + 8x - 11) &= 0.
 \end{aligned}$$

Решениями этого уравнения являются $x = 6$ или $x = 4 \pm \sqrt{5}$. Неравенству $5 < x < 6$ не удовлетворяет ни одно из них.

Тогда больший корень уравнения $x = 6$, а количество корней 2.

Ответ: 12.

В7. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Например, найдем сумму первых ста членов прогрессии $S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100$.

Формула для нахождения n -го члена прогрессии:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1).$$

Тогда $a_{100} = a_1 + d \cdot (100 - 1) = a_1 + 99 \cdot d$.

Подставим в формулу суммы прогрессии и получим $S_{100} = \frac{a_1 + a_1 + 99 \cdot d}{2} \cdot 100$ или $S_{100} = 100 \cdot a_1 + 4950 \cdot d$.

По условию $100a_1 + 4950d = 100$,

тогда

$$2a_1 + 99d = 2.$$

После аналогичных преобразований для суммы первых 200 членов прогрессии получаем:

$$2a_1 + 199d = 4.$$

Объединяем полученные уравнения в систему, получаем:

$$\begin{cases} 2a_1 + 99d = 2, \\ 2a_1 + 199d = 4 \end{cases}$$

Решаем ее, получаем:

$$\begin{cases} a_1 = 0,01, \\ d = 0,02 \end{cases}$$

Теперь запишем искомую сумму первых 50 членов прогрессии. Она равна: $S_{100} = 50 \cdot a_1 + 1225 \cdot d = 25$.

Ответ: 25.

В8. Рекомендую скачать у меня с сайта www.repet.by тему «Уравнения» (она в свободном доступе) и внимательно изучить все темы, разобранные в ней.

В уравнениях такого типа надо найти наиболее выгодный способ группировки множителей. Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) &= 24, \\ ((x+1)(x+4)) \cdot ((x+3)(x+2)) &= 24, \\ (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) &= 24. \end{aligned}$$

Проведем замену переменных. Пусть $x^2 + 5x = t$. Тогда $(t+4)(t+6) = 24$, $t = 0$ или $t = -10$. Имеем совокупность двух уравнений:

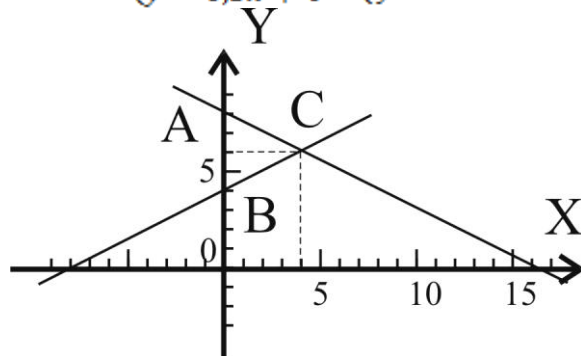
$$\begin{cases} x^2 + 5x = 0, \\ x^2 + 5x = -10 \end{cases}$$

Решая ее, получаем $x = 0$ или $x = -5$. Второе уравнение корней не имеет.

Ответ: -5.

В9. Построим фигуру на координатной плоскости. Все линии в условии – прямые. Поэтому фигура – треугольник. Найдем координаты вершин треугольника. Пусть A – вершина, полученная в точке пересечения оси ординат с прямой $x = 16 - 2y$. Для определения ее координат необходимо приравнять $x = 0$ (так как любая точка на оси ординат имеет координату $x = 0$). Получаем $16 - 2y = 0$, откуда $y = 8$. Итак, точка A имеет координаты $(0;8)$. Пусть B – вершина в точке пересечения оси ординат и прямой $y = 0,5x + 4$. Аналогично приравниваем $x = 0$ и имеем $y = 4$. Итак, координаты точки B $(0;4)$. Найдем координаты точки C , точки пересечения прямых $x = 16 - 2y$ и $y = 0,5x + 4$. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = 16 - 2y, \\ y = 0,5x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 6 \end{cases}$$



Итак, рассмотрим полученный треугольник. Его площадь можно найти как полупроизведение основания на высоту, опущенную на это основание. Удобнее всего рассмотреть основание $AB = 4$ и опущенную на него высоту $CH = 4$. Тогда $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

Ответ: 8.

В10. Пусть искомая скорость третьей машины равна x . Спустя время t после выезда третьей машины она догнала первую. К этому моменту времени первая и третья машины прошли одинаковый путь. Это значит, что

$$xt = 40(t + 0,5), \Rightarrow xt = 40t + 20.$$

Здесь учтено, что первая машина движется на полчаса больше третьей.

Спустя время $t + 1,5$ после выезда третья машина догнала вторую. К этому моменту вторая и третья машины прошли одинаковый путь. То есть

$$x(t + 1,5) = 50(t + 1,5 + 0,5), \Rightarrow x(t + 1,5) = 50t + 100.$$

Здесь также учтено, что вторая машина движется на полчаса больше третьей.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} xt = 40t + 20, \\ x(t + 1,5) = 50t + 100 \\ \begin{cases} t = 1, \\ x = 60. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: 60.

В11. Преобразуем уравнение. Имеем:

$$\sin^3 x - 3\cos^2 x \cdot \sin x + 0,5 \sin x \cdot \sin 2x - 3\cos^3 x = 0,$$

$$\sin^3 x - 3\cos^2 x \cdot \sin x + 0,5 \sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^3 x = 0,$$

$$\sin^3 x - 3\cos^2 x \cdot \sin x + \sin^2 x \cdot \cos x - 3\cos^3 x = 0,$$

$$\sin x \cdot (\sin^2 x - 3\cos^2 x) + \cos x \cdot (\sin^2 x - 3\cos^2 x) = 0,$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - 3\cos^2 x) = 0, \Rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) (\sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x)) = 0,$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x \right) (4\sin^2 x - 3) = 0, \Rightarrow 4\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$$

Это уравнение имеет три возможных решения. Разберем их по очереди.

1) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$. Корни этого уравнения задаются формулой $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$. Промежутку $\left[0; \frac{5\pi}{2} \right]$ из этих корней принадлежат $x = \frac{3\pi}{4}$ и $x = \frac{7\pi}{4}$.

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Корни этого уравнения задаются формулой

$x = (-1)^k \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \pi k = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$. Промежутку $\left[0; \frac{5\pi}{2} \right]$ из этих корней принадлежат

$x = \frac{4\pi}{3}$ и $x = \frac{5\pi}{3}$.

3) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Корни этого уравнения задаются формулой

$x = (-1)^k \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$. Промежутку $\left[0; \frac{5\pi}{2} \right]$ из этих корней принадлежат

$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$ и $x = \frac{7\pi}{3}$.

Всего уравнение на заданном промежутке имеет 7 корней. **Ответ: 7.**

Заметим, что уравнение $(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - 3\cos^2 x) = 0$ можно решать и другим способом. Действительно, произведение равно нулю, если один из сомножителей равен нулю. Получаем один из следующих вариантов:

1) $\sin x + \cos x = 0$.

Разделим обе части этого уравнения на $\cos x$. Получим:

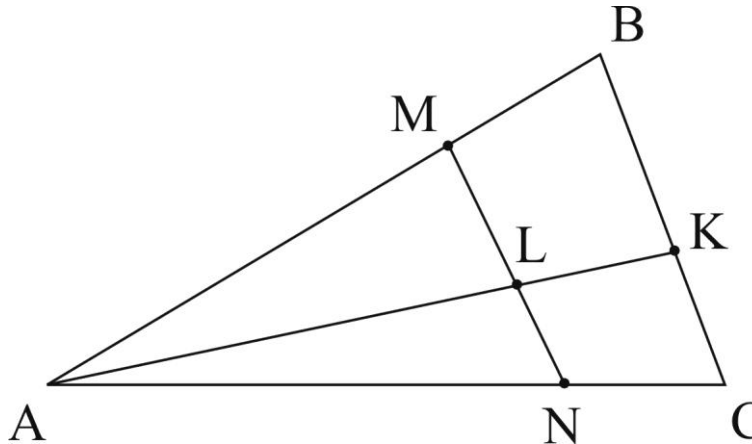
$$\operatorname{tg} x + 1 = 0, \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1, \Rightarrow x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k, k \in Z, \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

2) $\sin^2 x - 3 \cos^2 x = 0$. Разделим обе части этого уравнения на $\cos^2 x$. Получим:

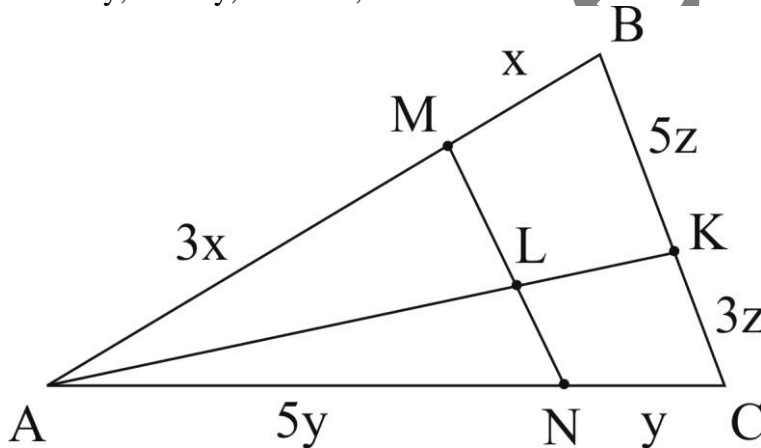
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x - 3 &= 0, \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 3, \\ \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}, \Rightarrow x &= \operatorname{arctg}(\pm\sqrt{3}) + \pi k, k \in Z, \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z. \end{aligned}$$

Видно, что получается такое же множество решений.

B12. Точки M, N, K расположены соответственно на сторонах AB, AC, BC треугольника ABC так, что $AM:MB = 3:1$, $AN:NC = 5:1$, $CK:KB = 3:5$. Отрезки AK и MN пересекаются в точке L. Найдите отношение AL/LK .

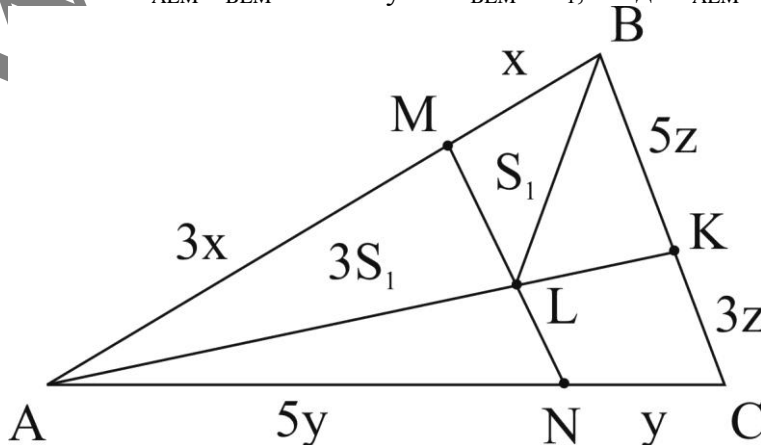


Пусть $AM = 3x$, $BM = x$, $AN = 5y$, $CN = y$, $CK = 3z$, $BK = 5z$.

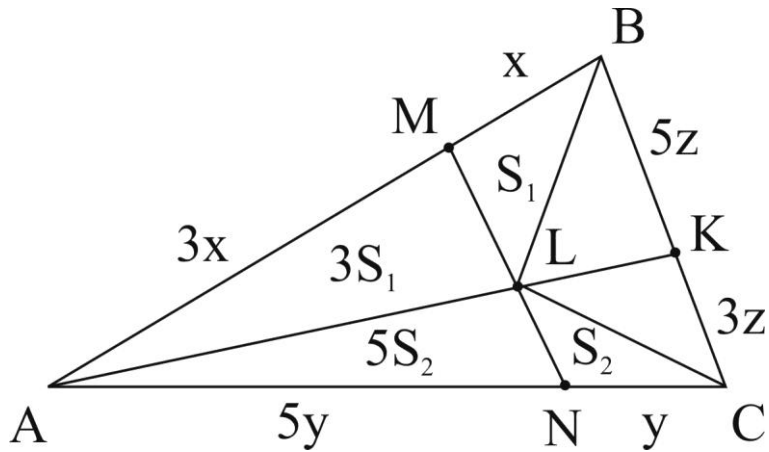


Сделаем дополнительное построение. Проведем отрезок BL.

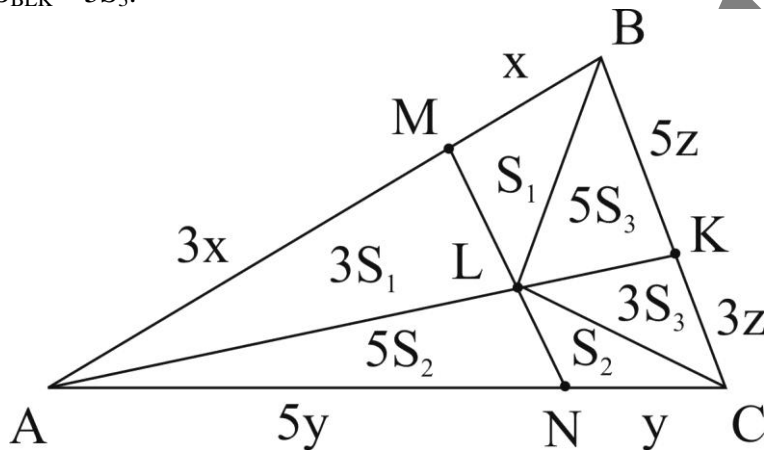
Рассмотрим треугольники ALM и BLM. У них общая высота (на рисунке она не показана для того, чтобы не загромождать его), а основания относятся как $AM:MB = 3:1$. Тогда площади треугольников ALM и BLM также относятся как $S_{ALM}:S_{BLM} = 3:1$. Пусть $S_{BLM} = S_1$, тогда $S_{ALM} = 3S_1$.



Сделаем ещё одно дополнительное построение. Проведем отрезок CL. Теперь рассмотрим треугольники ALN и CLN. Рассуждая аналогично, получим, что $S_{ALN}:S_{CLN} = 5:1$. Пусть $S_{CLN} = S_2$, тогда $S_{ALN} = 5S_2$.



Наконец, рассмотрим треугольники CLK и BLK. Рассуждая аналогично, получим, что $S_{CLK} : S_{BLK} = 3 : 5$. Пусть $S_{CLK} = 3S_3$, тогда $S_{BLK} = 5S_3$.



Аналогично можно найти соотношение площадей треугольников ABK и ACK. Имеем:

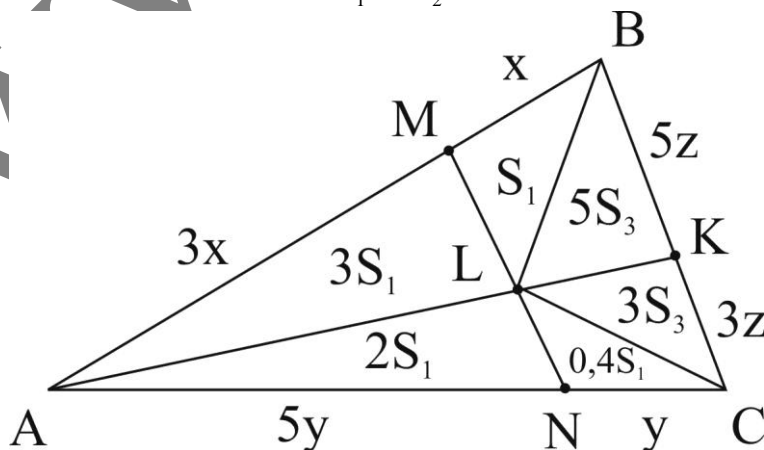
$$\frac{S_{ABK}}{S_{ACK}} = \frac{5}{3}$$

Распишем площади треугольников ABK и ACK. Получим:

$$\frac{3S_1 + S_1 + 5S_3}{5S_2 + S_2 + 3S_3} = \frac{5}{3}$$

Преобразуя это выражение, получаем:

$$2S_1 = 5S_2$$



Теперь рассмотрим треугольник AMN. С одной стороны, его площадь равна $S_{AMN} = 5S_1$, а с другой

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin \angle A,$$

$$5S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 5y \cdot \sin \angle A.$$

Площадь всего треугольника ABC, с одной стороны, равна $S_{ABC} = \frac{32}{5}S_1 + 8S_3$, а с другой

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A,$$

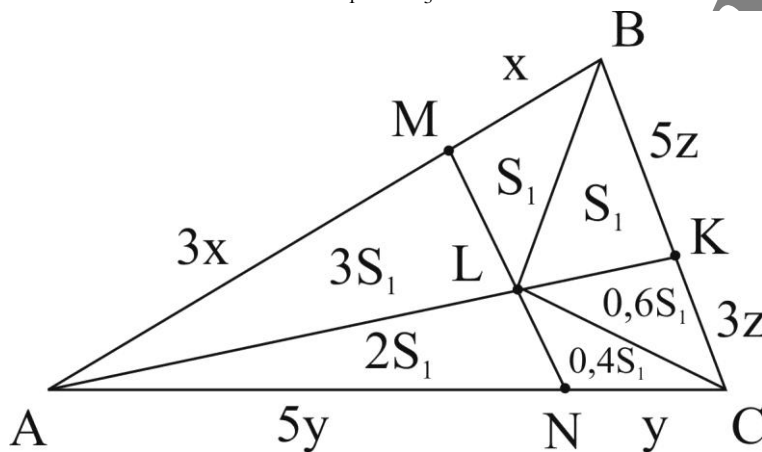
$$\frac{32}{5}S_1 + 8S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 6y \cdot \sin \angle A.$$

Разделим одно уравнение на другое. Получим:

$$\frac{5S_1}{\frac{32}{5}S_1 + 8S_3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 5y \cdot \sin \angle A}{\frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 6y \cdot \sin \angle A} \Rightarrow \frac{5S_1}{\frac{32}{5}S_1 + 8S_3} = \frac{5}{8}$$

откуда

$$S_1 = 5S_3.$$



Наконец, рассмотрим треугольники ABL и KBL. У них общая высота. Так как их площади относятся как $S_{ABL} : S_{KBL} = 4 : 1$, то и их основания относятся в том же отношении, то есть $AL : KL = 4 : 1$.

Ответ: 4.