Часть А

A1

Вас даже в Пединститут не возьмут, если Вы не сможете самостоятельно решить эту задачу.

A2

Вспоминаем формулы сокращенного умножения

$$(m \pm n)^2 = m^2 \pm 2mn + n^2$$

Ответ: 1.

A3

Рассмотрим два случая

$$(4x-1) = 5,6 \text{ и } (4x-1) = -5,6.$$

Решаем уравнения и получаем ответ.

Ответ: 4.

A4

Скорость движения тела равна $\upsilon = \frac{S}{t}$. В нашем случае возьмем промежуток времени t = 8 часов. За это время тело пройдет путь S = 400 км. Значит скорость тела будет равна $\upsilon = \frac{S}{t} = \frac{400 \text{ км}}{8 \text{ ч}} = 50$ км/ч

Ответ: 4.

A5

Данное неравенство равносильно системе из двух неравенств $\begin{cases} -6 < 5x - 3 \\ 5x - 3 < 7 \end{cases}$. Решим эту систему

$$\begin{cases} -3 < 5x \\ 5x < 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{5} \\ x < 2 \end{cases}.$$

Нанесем решения на числовую ось

Так как у нас система неравенств, то берем только общие целые решения. Таковыми будут 0 и 1. Значит, целых решений 2. Ответ: 2.

A6

По условию задачи площадь квадрата равна площади прямоугольника. Площадь прямоугольника находится как произведение сторон прямоугольника. Площадь квадрата равна квадрату стороны. То есть $a \cdot b = c^2$, где a и b – стороны прямоугольника, c – сторона квадрата. Ответ: 4.

A7

Будем решать пример по действиям.

1. $3,25 \cdot 1\frac{3}{13} = 3\frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 13 + 3}{13} = \frac{12+1}{4} \cdot \frac{16}{13} = 4$
2. $4 - 1\frac{16}{19} = \frac{4 \cdot 19}{19} - \frac{1 \cdot 19 + 16}{19} = \frac{41}{19}$
3. $\frac{41}{19} : 5,125 = \frac{41}{19} : 5\frac{1}{8} = \frac{41}{19} : \frac{41}{8} = \frac{41}{19} \cdot \frac{8}{41} = \frac{8}{19}$

Ответ: 3.

A8

Попробуем решить задачу «в лоб». Разделим имеющиеся у нас деньги на стоимость 2 коробок карандашей. Получим

$$\frac{9400 \text{ рублей}}{2 \cdot 1800 \text{ рублей}} = 2,61$$

То есть мы сможем купить только 2 раза по 2 пачки и получить в подарок еще 2 пачки. После покупки у нас останется

$$9400 \text{ рублей} - 2\cdot\left(2\cdot 1800 \text{ рублей}\right) = 2200 \text{ рублей}$$

На 2200 рублей мы сможем купить еще 1 комплект. Таким образом мы всего купили 7 комплектов.
Ответ: 3.

A9

Воспользуемся следствием из теоремы синусов:

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha},$$

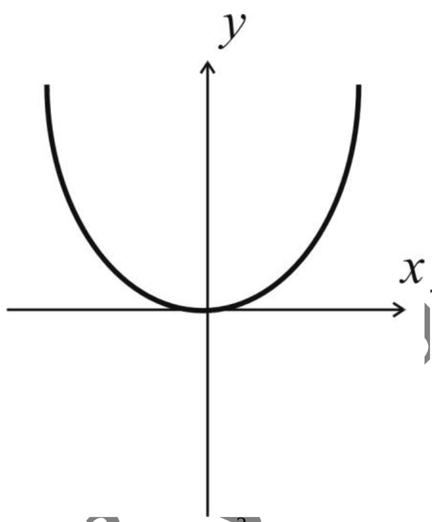
где R – радиус описанной около треугольника окружности, a – сторона, α – угол противолежащий стороне a. Следовательно

$$2\cdot 6 = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow a = 12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

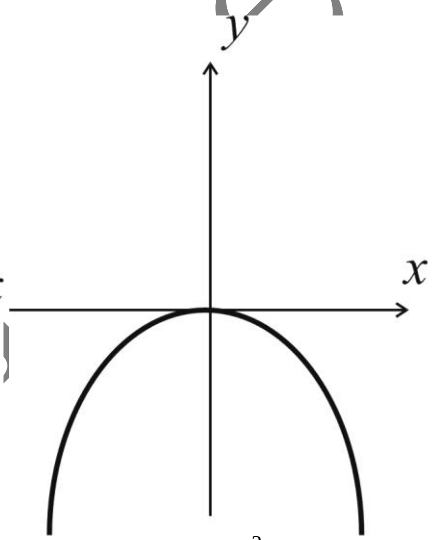
Ответ: 1

A10

Рассмотрим некоторые закономерности при преобразовании графиков функций.
Рассмотрим графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2$. В этом случае значение функции y изменяется на противоположное.

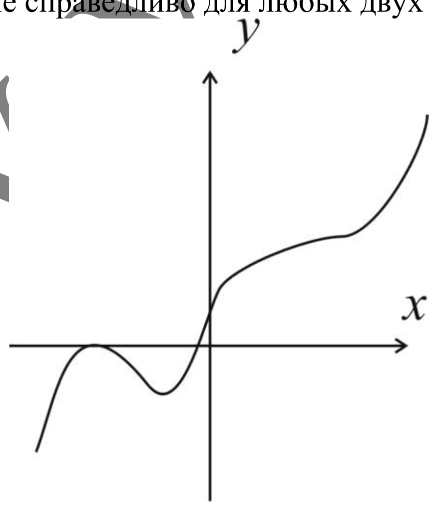


$y = x^2$

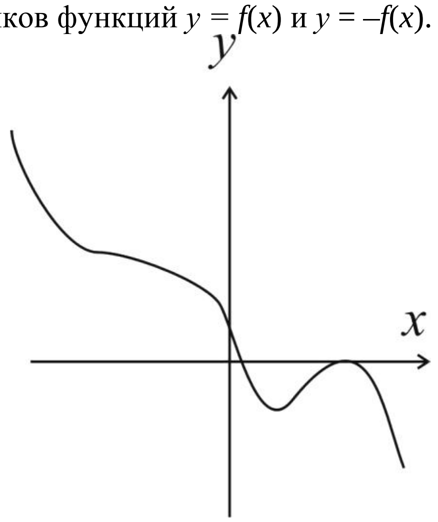


$y = -x^2$

Это утверждение справедливо для любых двух графиков функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$.



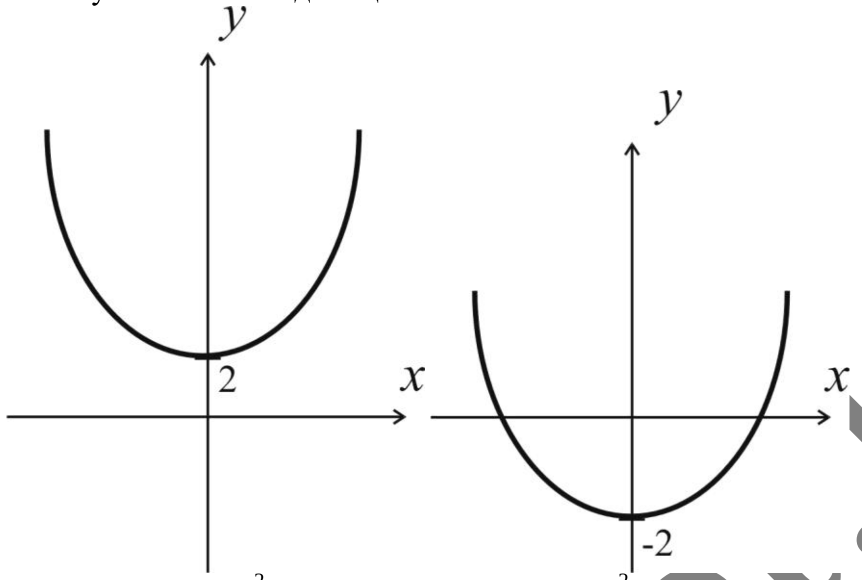
$y = f(x)$



$y = -f(x)$

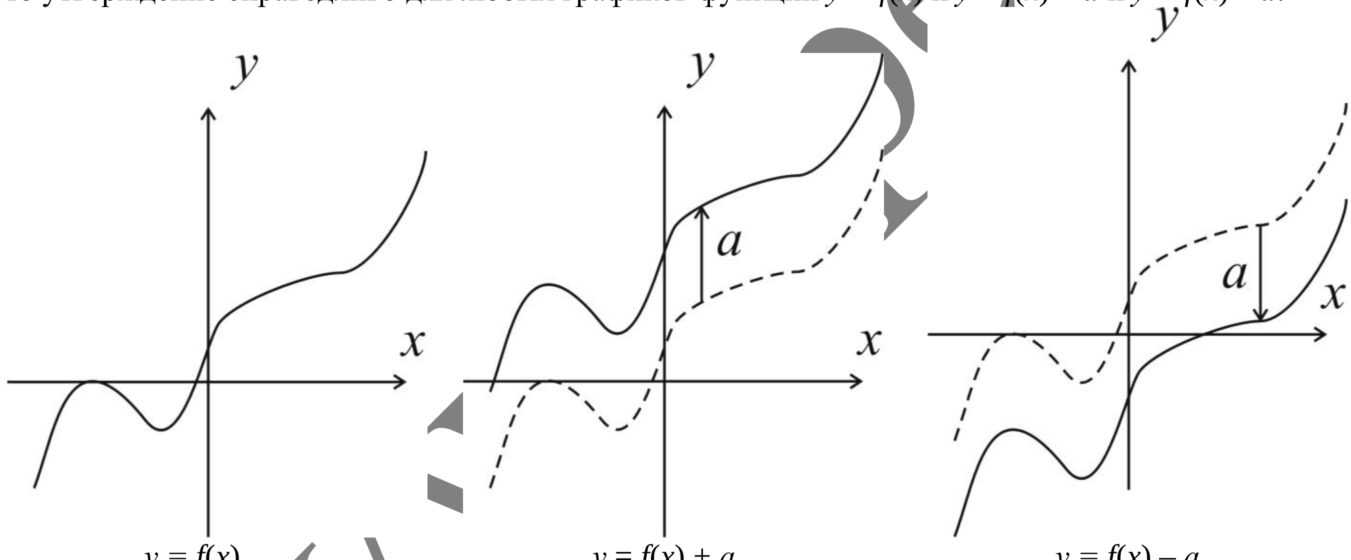
Если знак перед всей функцией заменить на противоположный, то график функции надо

симметрично отобразить относительно оси абсцисс OX.
Рассмотрим графики функций $y = x^2$ и $y = x^2 + 2$. В этом случае значение функции y увеличивается на 2, а весь график функции $y = x^2$ поднимается на 2 единицы. В случае графика функции $y = x^2 - 2$, график функции $y = x^2$ опускается на 2 единицы.



$y = x^2 + 2$ $y = x^2 - 2$

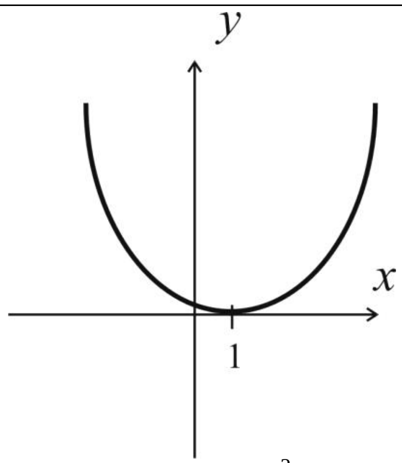
Это утверждение справедливо для любых графиков функций $y = f(x)$ и $y = f(x) + a$ и $y = f(x) - a$.



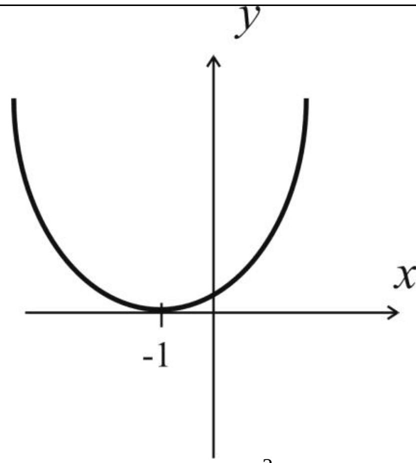
$y = f(x)$ $y = f(x) + a$ $y = f(x) - a$.

Если к значению функции прибавить число, то график функции надо «поднять» на указанное число единичных отрезков, а если от значения функции вычесть число, то график функции надо «опустить» на указанное число единичных отрезков.

Рассмотрим графики функций $y = x^2$ и $y = (x + 1)^2$. Значение второй функции будет равно значению первой функции при **меньших** на 1 значениях аргумента x. Например, $y = 0$ при $x = 0$ у первой функции и при $x = -1$ у второй функции; $y = 4$ при $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$ и при $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$ у второй функции.
Итак, если к аргументу функции прибавляется число, то весь график сдвигается **влево** на указанное число единичных отрезков.
Очевидно, что при вычитании числа от аргумента функции, то весь график сдвигается **вправо** на указанное число единичных отрезков. Например, график функции $y = (x - 1)^2$ сдвигается относительно графика функции $y = x^2$ на 1 вправо.

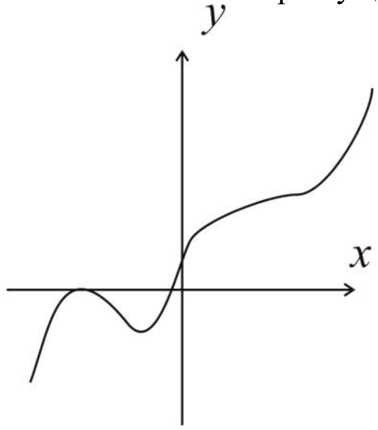


$y = (x-1)^2$

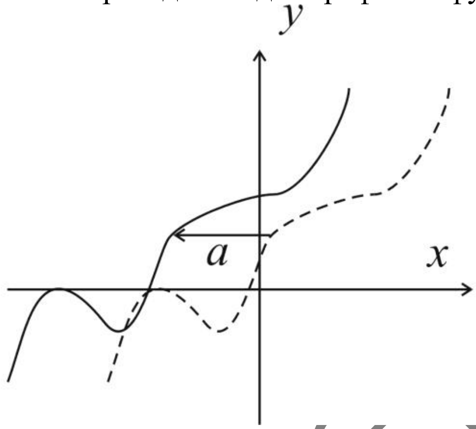


$y = (x+1)^2$

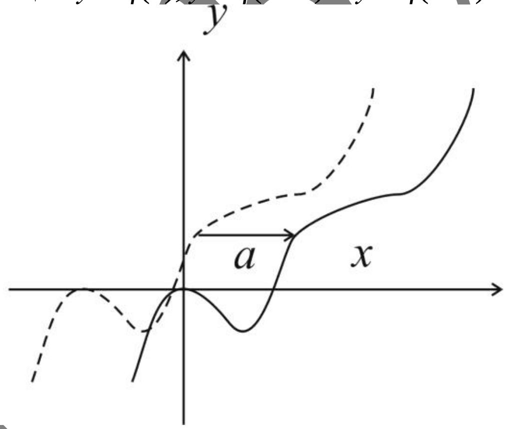
Конечно же все эти рассуждения справедливы для графиков функций $y = f(x)$, $y = f(x+a)$ и $y = f(x–a)$.



$y = f(x)$,



$y = f(x+a)$



$y = f(x–a)$.

Конечно же от Вас может потребоваться совершить сразу несколько преобразований графика. Например, имея график функции $y = x^2$, построим график функции $y = –(x+2)^2+1$.
Для этого график функции $y = x^2$ перевернём относительно оси абсцисс, сдвинем на 2 единичных отрезка влево и поднимем на один единичный отрезок вверх.
Теперь перейдём к данной задаче. Если график функции сдвинуть вдоль оси Ox вправо на 2 единицы, значит от x надо отнять 2, если график функции сдвинуть вдоль оси Oy вверх на 5 единиц, значит к y надо прибавить 5, в итоге имеем функцию: $y = (x-2)^2 + 5$. Ответ: 2

A11		

Выразим z из данного равенства:

$$y = \frac{zx - 2y}{z} \Rightarrow zy = zx - 2y \Rightarrow z = \frac{2y}{x-y}$$

Подставим данные значения x и y:

$$z = \frac{2\cdot(-0,3)}{-1,8+0,3} = \frac{-0,6}{-1,5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Ответ: 1

A12		

$$\frac{3^{n-4}\cdot 5^{n-2} + 3^{n-1}\cdot 5^{n-4}}{15^{n-4}} = \frac{3^{n-4}\cdot 5^{n-4}\left(5^2+3^3\right)}{3^{n-4}\cdot 5^{n-4}} = 25+27=52$$

Ответ: 3

A13		

У подобных треугольников стороны пропорциональны, а значит, коэффициент подобия в нашем случае равен 12:6=2 (отношение меньших сторон). Тогда большая сторона искомого треугольника равна большей стороне данного умноженного на коэффициент подобия, т.е. 12·2=24.

Ответ: 4

A14		

Данные числа представляют собой арифметическую прогрессию, в которой первый и последний члены прогрессии надо найти подбором. Ищем первый член прогрессии:101 на 8 не делится, 102 – не делится, 103 – не делится, 104 – делится! $a_1 = 104$. Ищем последний член прогрессии: 999 на 8 не делится и т.д. 992 – делится! $a_n = 992$.

$$a_1 = 104; \quad a_n = 992; \quad d = 8$$

Найдём количество членов прогрессии, воспользовавшись формулой n – го члена прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

откуда

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{992-104}{8} + 1 = 112$$

Ответ: 4

A15		

Понизим степень у слагаемых в числителе, воспользовавшись формулами

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \text{ и } \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

$$\frac{\sin^2 3\alpha - \cos^2 2\alpha}{\cos 5\alpha} = \frac{\frac{1-\cos 6\alpha}{2} - \frac{1+\cos 4\alpha}{2}}{\cos 5\alpha} = \frac{-(\cos 6\alpha + \cos 4\alpha)}{2\cos 5\alpha} = \frac{-2\cos 5\alpha \cdot \cos\alpha}{2\cos 5\alpha} = -\cos\alpha.$$ Ответ: 1

A16		

Первый способ «в лоб»

$$x^2 = 6 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{6+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{6-2\sqrt{5}} + 6 - 2\sqrt{5} \Rightarrow x^2 = 12 - 2\sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2}$$

$$x^2 = 12 - 2 \cdot \sqrt{36-20} \Rightarrow x^2 = 12 - 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Произведение корней уравнения равно –4.

Второй способ.

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 1 = 2$$

Тогда $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Ответ: 4

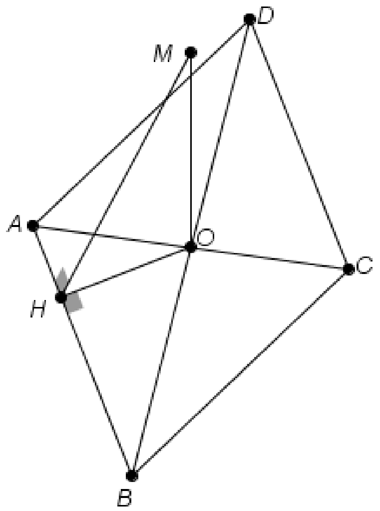
A17		

$$\frac{\left(4^{\frac{1}{3}} \cdot m^{-\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot m^{1,25} \cdot n^{\frac{1}{7}}}{\left(2 \cdot m^{-\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{3}{7}}\right)^{-2}} = \frac{4^{\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)} \cdot m^{-\frac{1}{6}\left(-\frac{3}{2}\right)} \cdot m^{\frac{5}{4}} \cdot n^{\frac{1}{7}}}{2^{-2} \cdot m^{-\frac{3}{4}\cdot(-2)} \cdot n^{\frac{3}{7}\cdot(-2)}} = \frac{4^{-\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{1}{4}} \cdot m^{\frac{5}{4}} \cdot n^{\frac{1}{7}}}{2^{-2} \cdot m^{\frac{3}{2}} \cdot n^{-\frac{6}{7}}} = \frac{2^{-1} \cdot m^{\frac{1}{4}+\frac{5}{4}} \cdot n^{\frac{1}{7}}}{2^{-2} \cdot m^{\frac{3}{2}} \cdot n^{-\frac{6}{7}}} = \frac{2 \cdot m^{\frac{3}{2}} \cdot n^{\frac{1}{7}+\frac{6}{7}}}{m^{\frac{3}{2}}} = 2n$$

Ответ: 2

A18		

Искомое расстояние — MH. По теореме о трёх перпендикулярах ОН перпендикулярно АВ.



$$OH=\frac{1}{2}h_{\text{ромба}};\qquad S_{\text{ромба}}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8=16$$

$$S_{\text{ромба}}=AB\cdot 2\cdot OH\Rightarrow h=\frac{16}{AB}$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AOB

$$AB^2=AO^2+OB^2=4+16=20\Rightarrow OH=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника OMH

$$HM=\sqrt{OH^2+OM^2}=\sqrt{\frac{16}{5}+4}=\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

Ответ: 3

Часть В

В1

Преобразуем выражения. Можно, конечно, решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=\sqrt{38},\\ x-y=\sqrt{26}\end{cases}$$

Однако легко увидеть, что корни этой системы будут «некрасивыми», и возводить их в 4–ую степень – довольно скучное занятие. Поступим хитрее. Возведем уравнения системы в квадрат. Имеем:

$$\begin{cases}(x+y)^2=38,\\ (x-y)^2=26\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2=38,\\ x^2-2xy+y^2=26\end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим:

$$4xy=12,$$

$$xy=3.$$

Из последнего равенства легко получаем, что $x^4\cdot y^4=3^4=81$.

Ответ: 81.

В2

Проведем замену переменных. Обозначим $\sqrt{\frac{x}{x+4}}=t$. Тогда исходное уравнение преобразуется к виду:

$$\sqrt{5}t-\frac{\sqrt{5}}{t}=4$$

Решаем это уравнение:

$$\sqrt{5}t^2-4t-\sqrt{5}=0,$$

$$D=16-4\cdot\sqrt{5}\cdot\left(-\sqrt{5}\right)=16+20=36,$$

$$t_{1,2}=\frac{4\pm 6}{2\sqrt{5}}$$

Понятно, что отрицательный корень не подходит. Тогда

$$t=\frac{10}{2\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

Имеем:

$$\sqrt{\frac{x}{x+4}} = \sqrt{5}$$
$$\frac{x}{x+4} = 5$$
$$x = -5.$$

Ответ: -5.

B3

В выражениях, содержащих углы типа $75°$, $105°$ и т.д. следует представлять аргумент в виде суммы углов $30°$, $45°$ или $60°$. В нашем случае

$$\frac{24\sin 105°}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{24\sin(45°+60°)}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{24(\sin 45° \cdot \cos 60° + \cos 45° \cdot \sin 60°)}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{24\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{6(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{6(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = 6$$

Ответ: 6.

B4

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot H$$

Находим площадь основания. Можно применить один из следующих способов. Во–первых, можно, зная все три стороны треугольника ABC, лежащего в основании пирамиды, найти любой из углов при основании (используйте для этого теорему косинусов), а далее применить формулу

$$S_{осн} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\alpha$$

Итак, пусть угол $< B = \alpha$. Тогда

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\alpha$$
$$3 = 4 + 4 - 2\cdot 2\cdot 2\cdot\cos\alpha,$$
$$\cos\alpha = \frac{5}{8}$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получаем, что

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

Тогда

$$S_{осн} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{\sqrt{39}}{4}$$

Во–вторых, можно заметить, что треугольник ABC равнобедренный, поэтому высота BK, опущенная на его основание AC, является и медианой. Следовательно, можно легко определить длину высоты по теореме Пифагора:

$$BK^2 = 4 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$$
$$BK = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Тогда площадь основания равна

$$S_{осн} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BK = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{39}}{4}$$

В–третьих, можно применить формулу Герона

$$S_{осн} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

где

$$p = \frac{2 + 2 + \sqrt{3}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

– полупериметр треугольника. Имеем:

$$S_{осн} = \sqrt{\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)}$$

$$S_{осн} = \sqrt{\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$S_{осн} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

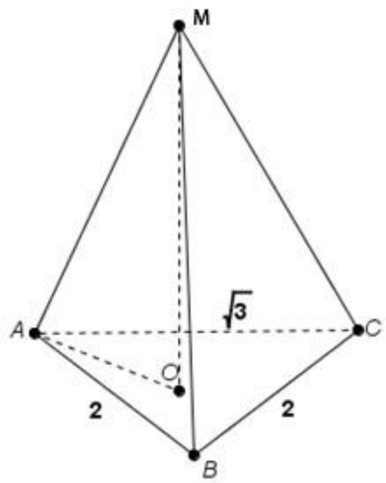
$$S_{осн} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{4 - \frac{3}{4}}$$

$$S_{осн} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{\sqrt{39}}{4}$$

НЕ ЧЕРЕЗ ГЕРОНА + РИСУНОК

Фраза «все боковые ребра наклонены под одинаковым углом» означает, что вершина пирамиды М проецируется на основание в центре описанной вокруг основания окружности О. Найдем радиус описанной окружности по формуле



$$R = \frac{abc}{4S}$$

Получим:

$$R = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник МОА. Для него

$$\text{tg}(< MAO) = \text{tg}60° = \frac{MO}{OA} = \frac{H}{R}$$

Отсюда получаем:

$$H = R \cdot \text{tg}60° = \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{3}$$

Тогда

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{39}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{3} = 1$$

Ответ: 1.

B5	

Запишем ОДЗ: $x \geq 1$. Произведение может равняться нулю, если один из сомножителей равен нулю. Имеем, что исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 0, \\ 3^{x+1} + 3^{2-x} - 28 = 0, \end{array}\right. \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Первое из уравнений совокупности имеем очевидный корень $x = 1$.

Решаем второе уравнение. Преобразуем его:

$$3^{x+1} + 3^{2-x} - 28 = 0,$$

$$3 \cdot 3^x + \frac{9}{3^x} - 28 = 0.$$

Пусть $3^x = t$ (понятно, что $t > 0$). Тогда

$$3t + \frac{9}{t} - 28 = 0$$
$$3t^2 - 28t + 9 = 0,$$
$$t = \tfrac{1}{3} \text{ или } t = 9,$$
$$3^x = \tfrac{1}{3} \text{ или } 3^x = 9,$$
$$x = -1 \text{ или } x = 2.$$

В ОДЗ входят корни $x = 1$ и $x = 2$. Тогда сумма корней равна 3.
Ответ: 3.

B6

Преобразуем неравенство:

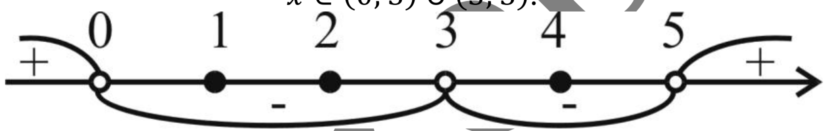
$$\left(2 - \frac{6}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{x-1}{2x-6}\right) < 0$$
$$\frac{2x-6}{x} \cdot \frac{2x-6-x+1}{2x-6} < 0$$
$$\frac{2(x-3)}{x} \cdot \frac{x-5}{2(x-3)} < 0$$

Заметьте, что если вы сократите множитель $x - 3$, то потеряете на числовой оси «выколотую» точку $x = 3$. Поэтому перепишем неравенство в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x} < 0, \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Решаем методом интервалов. Получаем:

$$x \in (0; 3) \cup (3; 5).$$

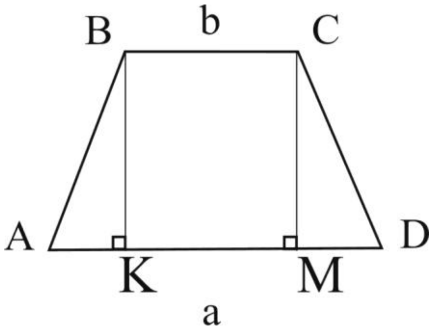


Целыми решениями являются числа 1,2 и 4. Их сумма равна 7.
Ответ: 7.

B7

Опустим из вершины B перпендикуляр на основание AD в точку K, а из вершины C перпендикуляр на основание в точку M. Пусть $AD = a$, $BC = b$. По условию

$$\frac{a+b}{2} = 7$$



Поскольку трапеция равнобедренная, то отрезки

$$AK = DM = \frac{a-b}{2}$$

а отрезки

$$AM = DK = \frac{a+b}{2} = 7$$

Рассмотри треугольник ACM – прямоугольный. По теореме Пифагора $AC^2 = AM^2 + CM^2$. Отсюда высота трапеции

$$CM = h = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$$

Тогда площадь трапеции есть

$$S = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h = 7 \cdot 24 = 168$$

Ответ: 168.

B8

Рекомендую скачать у меня с сайта www.repet.by тему «Уравнения» (она в свободном доступе) и внимательно изучить все темы, разобранные в ней.
Преобразуем уравнение:

$$x^2+\frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}=\frac{2x-2x^2}{x-5}$$
$$x^2+\left(\frac{x-1}{x-5}\right)^2=\frac{2x(1-x)}{x-5}$$
$$x^2+\left(\frac{x-1}{x-5}\right)^2-\frac{2x(1-x)}{x-5}=0$$
$$x^2+\left(\frac{x-1}{x-5}\right)^2+\frac{2x(x-1)}{x-5}=0$$
Дальше можно действовать двумя путями. Самый простой – заметить полный квадрат. Получается, что

$$\left(x+\frac{x-1}{x-5}\right)^2=0$$
$$x+\frac{x-1}{x-5}=0$$
$$\frac{x^2-5x+x-1}{x-5}=0$$
$$x^2-4x-1=0$$
По теореме Виета произведение корней этого уравнения равно -1. Заметим, что число $x=5$, не входящее в ОДЗ исходного уравнения, не является корнем уравнения $x^2-4x-1=0$.
Второй способ более громоздок, но является более общим.
Уравнения типа $A\cdot f^2(x)+B\cdot f(x)\cdot g(x)+C\cdot g^2(x)=0$, где A,B,C – постоянные коэффициенты, а f и g – любые функции, называется однородным. Решать однородное уравнение следует делением каждого слагаемого на $g^2(x)$ и последующей заменой переменных $t=\frac{f(x)}{g(x)}$. Действительно,
$$A\cdot\frac{f^2(x)}{g^2(x)}+B\cdot\frac{f(x)\cdot g(x)}{g^2(x)}+C\cdot\frac{g^2(x)}{g^2(x)}=0$$
$$A\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2+B\cdot\frac{f(x)}{g(x)}+C=0$$
$$t=\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$A\cdot t^2+B\cdot t+C=0$$
В нашем случае
$$x^2+\left(\frac{x-1}{x-5}\right)^2+\frac{2x(x-1)}{x-5}=0$$
Делим каждое слагаемое на x^2. Получаем:
$$1+\left(\frac{x-1}{x(x-5)}\right)^2+\frac{2(x-1)}{x(x-5)}=0$$
Пусть $t=\frac{x-1}{x(x-5)}$. Тогда получаем, что
$$1+t^2+2t=0$$
$$(t+1)^2=0$$
$$t=-1$$
$$\frac{x-1}{x(x-5)}=-1$$
$$\frac{x-1}{x(x-5)}+1=0$$
$$\frac{x-1+x^2-5x}{x(x-5)}=0$$
$$\frac{x^2-4x-1}{x(x-5)}=0$$
$$x^2-4x-1=0$$

Ответ: -1.

B9	

При исследовании выражений типа $a\sin x + b\cos x$ имеет смысл заменить значения чисел a и b на значения синуса и косинуса некоторого угла. Обычно этого достигают, умножая и деля каждое слагаемое выражения на $\sqrt{a^2+b^2}$. Тогда

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x\right)$$

Теперь следует обозначить

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$$

а

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$$

на что есть все основания, так как, во–первых,

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$$

и

$$\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$$

а, во–вторых,

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

что совпадает с основным тригонометрическим тождеством. Тогда

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot(\cos\alpha\cdot\sin x + \sin\alpha\cdot\cos x)$$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\alpha)$$

Здесь α – некоторой угол, величина которого важна при решении уравнений, а в данной задаче не имеет значения, значение $\sin(x+\alpha)$ лежит в пределах $[-1;1]$.

Вывод, который надо обязательно запомнить, если даже Вы не разобрались с преобразованиями, которые позволили этот вывод сделать!

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\cdot\sin x + b\cdot\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}.$$

В нашем случае

$$-\sqrt{19+30} \le \sqrt{19}\cdot\sin x + \sqrt{30}\cdot\cos x \le \sqrt{19+30},$$

тогда

$$-7 \le \sqrt{19}\cdot\sin x + \sqrt{30}\cdot\cos x \le 7.$$

Значит,

$$-7+2,6 \le \sqrt{19}\cdot\sin x + \sqrt{30}\cdot\cos x + 2,6 \le 7+2,6$$

Окончательно получаем

$$-4,4 \le \sqrt{19}\cdot\sin x + \sqrt{30}\cdot\cos x + 2,6 \le 9,6$$

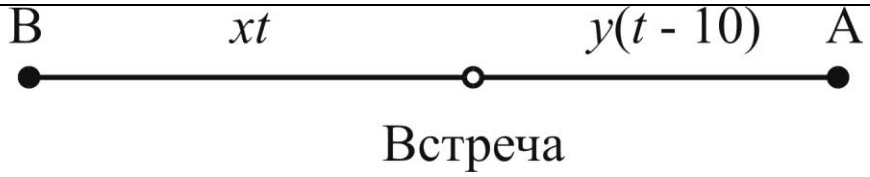
Тогда область значений функции $f(x)$ есть множество $[-4,4; 9,6]$. Наибольшее целое число из этого множества есть 9.

Ответ: 9.

B10	Из города B выехал велосипедист, через 10 ч из города A навстречу ему выехал второй велосипедист. При встрече оказалось, что первый велосипедист проехал на 45 км больше второго. Продолжая путь с той же скоростью и без остановок, второй велосипедист прибыл в B через 7 ч после встречи, а первый велосипедист в A — через 8 ч после встречи. Определите скорость (в км/ч) второго велосипедиста.

Первый способ. Пусть скорость первого велосипедиста равна x, а второго велосипедиста – y. К моменту встречи первый велосипедист проехал путь S за время t, то есть $S = x\cdot t$. Второй велосипедист проехал путь $S-45$ за время $t-10$, то есть $S-45 = y\cdot(t-10)$. Имеем:

$$x\cdot t - 45 = y\cdot(t-10)$$



Первый велосипедист проехал оставшийся путь до города А (а этот путь равен пути, пройденному вторым велосипедистом до встречи) за 8 ч, то есть $S-45=x\cdot 8$. Имеем:

$$S-45=x\cdot 8$$
$$x\cdot t-45=x\cdot 8$$

Второй велосипедист проехал оставшийся путь до города В (а этот путь равен пути, пройденному первым до встречи) за 7 ч, то есть $S=y\cdot 7$. Имеем:

$$x\cdot t=y\cdot 7.$$

Объединяем полученные уравнения в систему. Получаем:

$$\begin{cases} x\cdot t-45=y\cdot(t-10) \\ x\cdot t-45=x\cdot 8 \\ x\cdot t=y\cdot 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\cdot 8=y\cdot(t-10) \\ x\cdot t=y\cdot 7 \end{cases}$$

$$\frac{8}{t}=\frac{t-10}{7}$$

$t=-4$ (очевидно не подходит) или $t=14$.

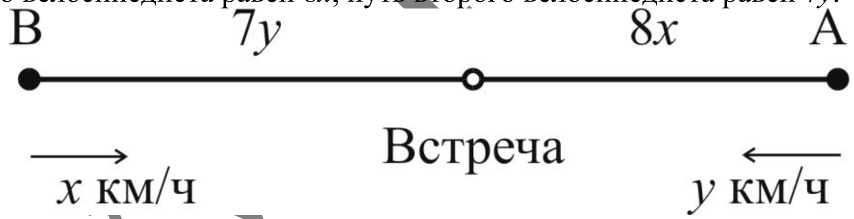
Далее используем второе уравнение исходной системы,

$$x\cdot t-45=x\cdot 8\Rightarrow x\cdot 14-45=x\cdot 8$$
$$x\cdot 6=45\Rightarrow x=7{,}5.$$

Наконец, из третьего уравнения исходной системы имеем:

$$x\cdot t=y\cdot 7$$
$$7{,}5\cdot 14=y\cdot 7$$
$$y=15.$$

Второй способ. Пусть x – скорость первого велосипедиста, y – скорость второго велосипедиста. После встречи путь первого велосипедиста равен $8x$, путь второго велосипедиста равен $7y$.



Значит, время движения первого велосипедиста до встречи равно $\frac{8x}{y}$, а время движения второго велосипедиста до встречи равно $\frac{7y}{x}$.

Учтем, что после встречи первый велосипедист проходит такое же расстояние, как второй велосипедист до встречи, и наоборот. По условию задачи составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x-7y=45 \\ \frac{8x}{y}-\frac{7y}{x}=10 \end{cases}$$

Ответ: 15.

B11	

Преобразуем уравнение. Имеем

$$7\sin^2 x+5\sin x+\cos^2 x=0\Rightarrow 6\sin^2 x+5\sin x+1=0$$

Пусть $\sin x=t$. Тогда

$$6t^2+5t+1=0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

или

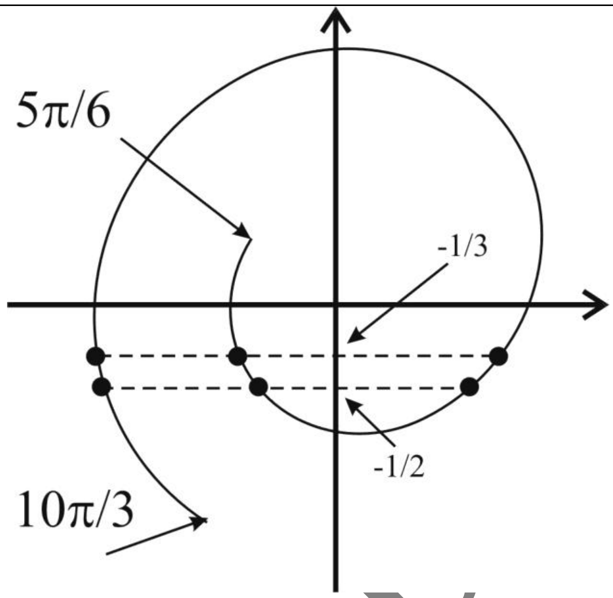
$$t = -\frac{1}{3}$$

Имеем:

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

или

$$\sin x = -\frac{1}{3}$$



Очевидно, что корни второго уравнения будут «неудобными». Для нахождения числа таких корней не следует решать уравнение. Следует вспомнить, что на тригонометрической окружности решения уравнения вида $\sin\alpha = A$ соответствует таким точкам, ордината которых равна A. Значит, нам надо посчитать число точек на тригонометрической окружности, ординаты которых равны –1/2 или –1/3, причем надо считать только точки из промежутка $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{10\pi}{3}\right]$. На рисунке приведены эти точки. Их число равно 6.

Ответ: 6.

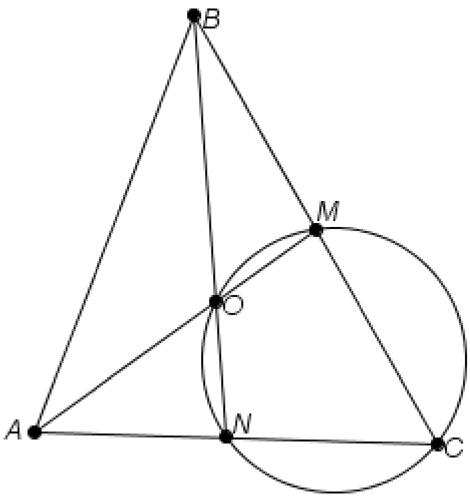
B12

Известно, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке, в которой делятся в отношении 2: 1. Пусть медиана $BN = x$. Тогда $BO = \frac{2}{3}x$. По теореме о двух секущих, исходящих из одной точки, имеем:

$$BO \cdot BN = BM \cdot BC$$

$$\frac{2}{3}x \cdot x = \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \sqrt{13}$$

$$x = \frac{\sqrt{39}}{2}$$



Пусть теперь угол $< BNC = \alpha$. Тогда $< BNA = 180° - \alpha$. Запишем теоремы косинусов для треугольников ANB и CNB. Получим:

$$\begin{cases} AB^2 = BN^2 + AN^2 - 2 \cdot BN \cdot AN \cdot \cos(180° - \alpha) \\ BC^2 = BN^2 + CN^2 - 2 \cdot BN \cdot CN \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} AB^2 = \frac{39}{4} + \frac{19}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} \cdot \frac{\sqrt{19}}{2} \cdot \cos\alpha \\ 13 = \frac{39}{4} + \frac{19}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} \cdot \frac{\sqrt{19}}{2} \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Сложим уравнения системы. Имеем:

$$AB^2 + 13 = \frac{39}{4} + \frac{19}{4} + \frac{39}{4} + \frac{19}{4}$$

$$AB^2 + 13 = 29$$

$$AB^2 = 16$$

$$AB = 4$$

Ответ: 4.