# Тема 2. Системы уравнений и методы их решения

Содержание

# 2.01. Общие сведения о системах уравнений

Изучение темы «Системы уравнений» мы начнем с примера.

**ПРИМЕР.** *Найдите два числа, сумма которых равна 15, а разность 1.*

Пусть искомые числа равны $x$ и $y$. Нам нужно, чтобы выполнялись одновременно два условия. С одной стороны, $x + y = 15$. С другой стороны, $x - y = 1$. Чтобы показать, что необходимо найти решение подходящее для обоих уравнений, используют фигурную скобку и записывают это так:

$$\begin{cases} x+y=15 \\ x-y=1 \end{cases}.$$

Несколько связанных друг с другом уравнений называют **системой уравнений**.

**Решением системы уравнений** с двумя неизвестными называют пару значений переменных, которая является одновременно решением каждого из входящих в систему уравнений. Система может содержать также больше двух переменных и более двух уравнений.

Самый простой способ решения систем уравнений – **метод подстановки**. Для применения этого метода в одном из уравнений системы одна переменная выражается через другие переменные и подставляется в остальные уравнения системы.

**ПРИМЕР**. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ x+3y=5 \end{cases}$.

Из первого уравнения выразим $x$ через коэффициенты и $y$ и получим $x = \dfrac{2y+4}{3}$. Подставляем это выражение во второе уравнение. Получаем

$$\frac{2y+4}{3}+3y=5$$

Решаем уравнение и находим $y = 1$. Теперь находим $x$, подставляя найденное значение вместо $y$ в выражение для $x$. Получаем

$$x=\frac{2\cdot 1+4}{3}=2\ .$$

Обратите внимание, что в ответе записываются пары чисел (если в системе уравнений две переменных), причём на первом месте записывается переменная $x$, а на втором месте переменная $y$. Количество решений системы равно количеству пар чисел (если в системе уравнений две переменных). В данной системе мы получили одно решение.

**Ответ:** (2; 1).

**ОЧЕНЬ ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ.** Перед тем, как выражать одну из переменных, надо посмотреть, какую из переменных и из какого уравнения проще выразить. В разобранной только что системе гораздо удобнее было бы выразить $x$ из второго уравнения $x = 5 - 3y$ и подставить в первое. При таком способе мы избегаем получение дробей, которые обычно усложняют нам жизнь.

**ПРИМЕР.** *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 4x-y=6 \end{cases}$.

Помним о том, что мы лентяи, и ищем наиболее простой способ выразить неизвестную. Легче всего выразить $y$ из второго уравнения $y = 4x - 6$ и подставить в первое уравнение. Получим

$$2x+3\cdot\left(4x-6\right)=10.$$

Решаем уравнение и получаем $x = 2$. Затем находим второе неизвестное $y = 4\cdot 2 - 6 = 2$ . **Ответ:** (2; 2).

**ПРИМЕР.** *Решить систему уравнений* $\begin{cases} -2\left(x-y\right)+16=3\left(7+y\right) \\ 6x-\left(x-5\right)=-\left(1+y\right)-8 \end{cases}$

Эта система ничем не отличается от предыдущих систем. Только с самого начала мы обязаны раскрыть скобки и привести подобные

$$\begin{cases} -2x+2y+16=21+3y \\ 6x-x+5=-1-y-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-y=5 \\ 5x+y=-14 \end{cases}$$

А дальше действуем как в предыдущих примерах. **Ответ:** (–3;1) .

**ПРИМЕР.** *Решить систему уравнений* $\begin{cases} \dfrac{2x}{5}+\dfrac{y}{3}=1 \\ \dfrac{x}{10}-\dfrac{7y}{6}=4 \end{cases}$.

Эта система также ничем не отличается от предыдущих систем. Приведем дроби и в первом, и во втором уравнении к общему знаменателю

$$\begin{cases} \dfrac{6x+5y}{15}=1 \\ \dfrac{3x-35y}{30}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+5y=15 \\ 3x-35y=120 \end{cases}$$

Дальше как обычно.
**Ответ:** (5;–3).

**Решите системы уравнений**

1) $\begin{cases} 2x+y=12 \\ 7x-2y=31 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-2x=4 \\ 7x-y=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ 5x-3y=25 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(3x-2y)+1=7x \\ 12(x+y)-15=7x+12y \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=-4 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=-2 \end{cases}$.

**Ответы.** 1) (5; 2) 2) (1; 6) 3) (13/3; –10/9) 4) (3;-0,5) 5) (–6;4)

Если численные коэффициенты перед одной из переменных равны по величине, но противоположны по знаку, то систему очень просто решить, сложив левые и правые части уравнений. В этом случае одна переменная «исчезает», и мы легко находим вторую переменную. Затем подставляем найденную переменную в любое из уравнений, и находим первую переменную.

**ПРИМЕР.** *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 5x+2y=19 \end{cases}$.

В первом уравнении есть слагаемое –2*y*, во втором уравнении есть слагаемое 2*y*. Если их сложить, то получается 0. Значит, надо сложить левые части уравнений и приравнять к сумме правых частей

$$3x-2y+5x+2y=5+19.$$

После приведения подобных слагаемых получим $8x=24$. Тогда $x = 3$. Подставим вместо $x$ число 3 в первое уравнение (можем и во второе, разницы нет) получаем $3\cdot 3-2y=5$. Откуда $y = 2$.
**Ответ:** (3; 2).

Если численные коэффициенты перед одной из переменных равны по величине, и совпадают по знаку, то систему очень просто решить, вычитая левые и правые части уравнений. В этом случае одна переменная «исчезает», и мы легко находим вторую переменную. Затем подставляем найденную переменную в любое из уравнений, и находим первую переменную.

**ПРИМЕР.** *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 4x-3y=5 \\ 4x+2y=-10 \end{cases}$.

В первом уравнении есть слагаемое 4*x*, во втором уравнении тоже есть слагаемое 4*x*. Если их вычесть, то получается 0. Значит, надо вычесть левые части уравнений и приравнять к разности правых частей

$$4x-3y-(4x+2y)=5-(-10).$$

**Будьте аккуратны при вычитании. Здесь легко можно сделать ошибку в знаках!!!**
Получаем $4x-3y-4x-2y=5+10$. После приведения подобных

$$-5y=15.$$

Тогда $y = -3$. Теперь подставим вместо $y$ число –3 в первое уравнение. Получим

$$4x-3(-3)=5.$$

После решения уравнения получим ответ: (7/2; –3). Эту систему можно решить и методом вычитания. Для этого мы просто умножим каждое слагаемое одного из уравнений (например, умножим все слагаемые первого уравнения) на минус 1. Получим

$$\begin{cases}4x-3y=5\\4x+2y=-10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\cdot(4x-3y)=-1\cdot 5\\4x+2y=-10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4x+3y=-5\\4x+2y=-10\end{cases}$$

Теперь мы можем использовать метод сложения. Если численные коэффициенты перед одной из переменных равны по величине, и совпадают по знаку я настоятельно рекомендую домножать одно из уравнений на минус один и решать систему сложением.

**Решите системы уравнений**

1) $\begin{cases}2x+3y=-5\\x-3y=38\end{cases}$ 2) $\begin{cases}22y+10x=16\\10x-7y=74\end{cases}$ 3) $\begin{cases}13x-8y=28\\11x-8y=24\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x+2y=5\\5x-2y=-45\end{cases}$

**Ответы.** 1) (11; –9) 2) (6; –2) 3) (2; –1/4) 4) (–5; 10)

Если численные коэффициенты перед переменными отличаются по величине, то можно попробовать домножить левую и правую часть одного из уравнений так, чтобы коэффициенты перед одной из переменных стали равны по величине. После этого систему очень просто решить, складывая или вычитая левые и правые части уравнений.

**ПРИМЕР.** *Решить систему уравнений* $\begin{cases}5x+11y=8\\10x-7y=74\end{cases}$.

Надо «увидеть» умножение первого уравнения на 2, чтобы коэффициенты перед $x$ в обоих уравнениях были одинаковы. После умножения получаем

$$\begin{cases}5x+11y=8\\10x-7y=74\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\cdot(5x+11y)=2\cdot 8\\10x-7y=74\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}10x+22y=16\\10x-7y=74\end{cases}.$$

А дальше как в предыдущих примерах. **Ответ:** (6; –2).

**ПРИМЕР.** *Решить систему уравнений* $\begin{cases}3x-93=5y\\-103+5x-4y=0\end{cases}$.

Сначала перепишем уравнения этой системы в виде, более удобном для преобразований

$$\begin{cases}3x-5y=93\\5x-4y=103\end{cases}$$

При решении этой системы мы не сможем найти целое число, умножая на которое одно из уравнений, мы выравниваем коэффициенты перед одной из переменных. Но мы догадаемся умножить первое уравнение на 5, а второе уравнение на 3. Получим

$$\begin{cases}3x-5y=93 \;\big|\cdot 5\\5x-4y=103 \;\big|\cdot 3\end{cases}$$

Тогда коэффициенты перед $x$ станут одинаковыми

$$\begin{cases}15x-25y=465\\15x-20y=309\end{cases}.$$

После вычитания и решения получаем ответ. **Ответ:** (11; –12).

Обратите внимание, что можно было умножить первое уравнение на 4, а второе уравнение на 5, приравнивая коэффициенты перед $y$.

**Так же обращаю Ваше внимание, что все уравнения так же можно решить методом подстановки. Просто для некоторых систем метод сложения/вычитания гораздо проще.**

**Решите системы уравнений методом сложения или вычитания**

1) $\begin{cases}40x+3y=10\\20x-7y=5\end{cases}$ 2) $\begin{cases}42y+33x=10\\9x+14y=4\end{cases}$ 3) $\begin{cases}13x-12y=14\\11x-4=18y\end{cases}$ 4) $\begin{cases}8x+9y=-2\\5x=-4y-11\end{cases}$

**Ответы.** 1) (1/4; 0) 2) (–1/3; 1/2) 3) (2; 1) 4) (–7; 6).

**Различные варианты систем**

**Вариант 1.** В системе уравнений

$$\begin{cases}10x+14y=42\\15x+21y=63\end{cases}$$

все коэффициенты пропорциональны

$$\frac{10}{15}=\frac{14}{21}=\frac{42}{63}=\frac{2}{3}.$$

Такая система уравнений будет иметь бесконечное множество решений. Докажем это.
Разделим первое уравнение на 2, а второе – на 3 и получим два одинаковых уравнения:

$$\begin{cases}5x+7y=21\\5x+7y=21\end{cases}$$

то есть фактически одно уравнение с двумя неизвестными, у которого **бесконечное множество решений**.

**Вариант 2.** В системе уравнений

$$\begin{cases}2x-3y=7\\6x-9y=12\end{cases}$$

коэффициенты при $x$ и $y$ пропорциональны

$$\frac{2}{6}=\frac{-3}{-9}=\frac{1}{3},$$

но отношение свободных членов 7/12 не равно 1/3. Почему эта система не имеет решений? Ответ очень простой. Разделив второе уравнение на 3, мы получим:

$$\begin{cases}2x-3y=7\\2x-3y=4\end{cases}.$$

Уравнения этой системы противоречивы, потому что одно и то же выражение ($2x$ – $3y$) не может быть одновременно равно и 7, и 4. **Решений у такой системы нет.**

**Решите системы уравнений**

1. $\begin{cases}9x+8y=21\\6x+4y=13\end{cases}$ 2. $\begin{cases}3x+4y=29\\9x-2y=17\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x-y=5\\2x-2y=7\end{cases}$ 4. $\begin{cases}2x+5y=15\\3x+8y=-1\end{cases}$ 5. $\begin{cases}2x+5y=15\\4x+3y=-5\end{cases}$

6. $\begin{cases}3x+5y+9=0\\2x-y-7=0\end{cases}$ 7. $\begin{cases}5x+3y=10\\10x+6y=-5\end{cases}$ 8. $\begin{cases}2x-y=3\\6x-3y=9\end{cases}$

**Ответы:** 1. $\left(\frac{5}{3};\frac{3}{4}\right)$; 2. (3;5), 3. нет решений, 4. (125;–47), 5. (–5;5), 6. (2;–3), 7. нет решений, 8. (–∞;+∞),

# 2.02. Метод подстановки

Как уже говорилось выше, если есть возможность выразить неизвестную из одного уравнения и подставить во второе, то попробуйте так сделать. Это самый простой способ решения системы. Его Вы должны пытаться применить при решении любой системы. Все остальные методы сложней, чем метод подстановки. Отличие этого параграфа от предыдущего только в том, что в результате подстановки мы будем получать не линейные, а квадратные или дробно–рациональные уравнения.

**ЕСЛИ В СИСТЕМЕ БОЛЬШЕ ЧЕМ ОДНА ПАРА РЕШЕНИЙ, ТО ОЧЕНЬ ВАЖНО ПРАВИЛЬНО ЗАПИСАТЬ ПАРЫ НЕ ПЕРЕПУТАВ РЕШЕНИЯ!!!**

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases}y=\frac{3}{5}x\\y^2-xy=-6\end{cases}$

Решение очевидно – подставляем $y$ из первого уравнения во второе. Получаем

$$\left(\frac{3}{5}x\right)^2 - x\cdot\frac{3}{5}x = -6.$$

Домножаем на –1 и приводим подобные: $\frac{3}{5}x^2 - \frac{9}{25}x^2 = 6 \Rightarrow \frac{6}{25}x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 25$. Так как при извлечении квадратного корня мы получим два значения *x*, то наша система разделяется на две системы

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{3}{5}x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{3}{5}x \end{cases}.$$

**Ответ:** (5; 3), (–5; –3)

**ПРИМЕР.** *Решим систему уравнений* $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 \\ x + y + 8 = 0 \end{cases}$

Выразим из второго уравнения *x* и подставим в первое. Получим: $(-y-8)^2 + y^2 + 6(-y-8) + 2y = 0$

Обратите внимание, что $(-y-8)^2 = (y+8)^2$, то есть **все знаки внутри скобки можно поменять на противоположные, если выражение в скобках находится в четной степени**. После раскрытия скобок получаем

$$y^2 + 16y + 64 + y^2 - 6y - 48 + 2y = 0 \Rightarrow 2y^2 + 12y + 16 = 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 8 = 0 \Rightarrow y_1 = -2 \text{ и } y_2 = -4$$

Тогда $x_1 = -y_1 - 8 = -6$ и $x_2 = -y_2 - 8 = -4$ . **Ответ:** (–6; –2), (–4; –4)

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x} \\ y^2 - x - 5 = 0 \end{cases}$

Обычно сначала надо выразить неизвестную из одного уравнения, подставить в другое и только потом приводить дроби к общему знаменателю. Однако именно в этом примере мы можем сначала привести дроби к общему знаменателю и только потом заниматься подстановкой. Почему? Обратите внимание на то, что в первой и второй дроби у нас присутствует только переменная *y*, а переменной *x* нет. После приведения к общему знаменателю получаем $\begin{cases} \frac{2}{y^2-1} = \frac{1}{x} \\ y^2 = x + 5 \end{cases}$. Из второго уравнения выражаем $y^2 = x + 5$ и подставляем в первое уравнение . Получим систему равносильную исходной

$$\begin{cases} \frac{2}{x+4} = \frac{1}{x} \\ y^2 = x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 4 \\ y^2 = x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

Конечно, можно было бы выразить *x* из второго уравнения и подставить в первое. Ответы, естественно, были бы такими же.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

Несмотря на то, что у нас три переменных, такие системы легко решаются. Сразу обращаем внимание на то, что мы можем легко выразить *z* из первого и второго уравнений. Выражаем и приравниваем

$$\begin{matrix} z = 7 - 2x - y \\ z = 8 - x - 2y \end{matrix} \Rightarrow 7 - 2x - y = 8 - x - 2y \Rightarrow y = x + 1$$

Теперь это значение *y* мы можем подставить во все три уравнения. Получим

$$\begin{cases} 2x + (x+1) + z = 7 \\ x + 2(x+1) + z = 8 \\ x + (x+1) + 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 + z = 7 \\ 3x + 2 + z = 8 \\ 2x + 1 + 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 6 - z \\ 3x = 6 - z \\ 2x = 8 - 2z \end{cases}$$

Первые два уравнения получились тождественными, поэтому для дальнейшего решения будем использовать второе и третье уравнение. У нас получилась система из двух уравнений с двумя неизвестными, которая решается методом подстановки.

$$\begin{cases} 3x = 6 - z \\ 2x = 8 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6-z}{3} \\ x = 4 - z \end{cases} \Rightarrow \frac{6-z}{3} = 4 - z \Rightarrow 6 - z = 12 - 3z \Rightarrow 2z = 6 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$$

**Ответ:** (1; 2; 3)

При решении системы из трех уравнений с тремя неизвестными надо выразить одну из переменных из одного уравнения (и переменную и уравнение, из которого будем выражать, выбираем из соображений удобства) и подставить эту переменную в два других уравнения. Мы получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными, которую решим методом подстановки.

**Иногда в условии задачи Вас будут просить найти точки пересечения графиков функций. В таких задачах графики строить не надо!!! На самом деле достаточно просто решить систему уравнений!**



**Тест 2.02.01.** Решите системы уравнений

**1.** $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{x-1} - \dfrac{x-y}{2y} = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 3x - 2 = 0 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} \dfrac{xy}{x-3} = \dfrac{9}{2} \\ x + y = 12 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} 2x + y^2 = 3 \\ 3x + y^4 = 4 \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1} - \dfrac{5}{y+1} = 1 \\ \dfrac{4}{x+5} = \dfrac{2}{y} \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} 2x^2 + y - z = -1 \\ z + y - 2x = 1 \\ x^4 + zy - y = 1 \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (5;1) | (1;1) $\left(\dfrac{82}{25}; -\dfrac{13}{25}\right)$ | (9;3) $\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{27}{2}\right)$ | (1;1); (1;–1); $\left(\dfrac{5}{4}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{5}{4}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | (–15;–5), (3;4) | (1;0;3), (–1;–2;1) | (3;2), (2;3), (–3;–2), (–2; –3) |

**Тест 2.02.02.** Решите системы уравнений

**1.** $\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 92 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} x + y^2 = 2 \\ 2y^2 + x^2 = 3 \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} x^2 + xy + 6x + 3 = 0 \\ y - 3x - 7 = 0 \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} 3x = 2y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 196 \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} \dfrac{y-2}{x-1} = 2 \\ y - 2x = x^2 - 1 \end{cases}$

**8.** Найдите точки пересечения графиков уравнений: $x^3 + y = 1$ и $y^3 - 4y^2 + 4y + x^6 = 1$.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(6;4)$, $(192;-58)$ | $(1;2)$, $\left(\dfrac{25}{17}; \dfrac{22}{17}\right)$ | (4;2), (–4;–2), (–2;–4), (2;4) | $(1;1)$ $(1;-1)$ | (–3;–2); (–0,25; 6,25) | $(4;6;12)$, $(-4;-6;-12)$ | $(-1;-2)$ | $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;2)$ |

# 2.03. Расщепление системы на две системы

Основная идея этого метода заключается в том, чтобы представить одно из уравнений системы в виде произведения двух множителей, произведение которых равно 0. Как мы знаем из темы «Решение уравнений», если произведение двух выражений равно 0, то каждое из них может быть равно 0. Таким образом, мы будем иметь право разделить эти уравнение на два, приравняв каждое из них к 0. При этом другое уравнение системы (которое мы не трогали), составим им пару и мы из одной сложной системы получим две простые, которые сможем решить методом подстановки.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} x^2+y^2-x=2 \\ (x-1)(y+3)=2x^2-x-1 \end{cases}$

Метод подстановки тут не сработает, так как ни $x$ ни $y$ мы не можем выразить ни из первого ни из второго уравнения. Поэтому думаем, как мы можем преобразовать уравнения системы.
С первым уравнением мы ничего сделать не может. Поработаем со вторым уравнением. В правой части второго уравнения у нас имеется квадратный трехчлен. Приравняем его к 0 и при помощи формулы $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ разложим его на множители

$$2x^2-x-1=0 \;\Rightarrow\; D=1^2-4\cdot 2\cdot(-1)=9=3^2$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=-\dfrac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow 2x^2-x-1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)=(2x+1)(x-1)$$

Второе уравнение примет вид $(x-1)(y+3)=(2x+1)(x-1)$. Перенесем все слагаемые в левую часть и вынесем общий множитель за скобки

$$(x-1)(y+3)-(2x+1)(x-1)=0 \;\Rightarrow\; (x-1)\cdot\big((y+3)-(2x+1)\big)=0$$

Из последнего уравнения следует, что или $(x-1)=0$ или $(y+3)-(2x+1)=0$. То есть одно уравнение у нас разделилось на два. Тогда исходная система равносильна совокупности (то есть мы берем все решения) двух систем

$$a)\begin{cases} x^2+y^2-x=2 \\ x-1=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad b)\begin{cases} x^2+y^2-x=2 \\ y-2x+2=0 \end{cases}$$

То есть первое уравнение у нас осталось в исходном виде, а вместо второго уравнения мы получили два уравнения и соответственно две системы, решить которые не составляет труда. Это метод и называется методом расщепления системы уравнений.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} 3x-5xy+1=0 \\ y^2-8xy+16x^2=4 \end{cases}$

И опять метод подстановки не работает. Поэтому надо увидеть, что левую часть второго уравнения можно свернуть по формуле квадрата разности, а в правой части 4 заменить на $2^2$. Получим

$$(y)^2-2\cdot y\cdot 4x+(4x)^2=4 \;\Rightarrow\; (y-4x)^2-2^2=0 \;\Rightarrow\; (y-4x-2)(y-4x+2)=0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} y-4x-2=0 \\ y-4x+2=0 \end{matrix}$$

И наша сложная система преобразуется в две простые системы

$$\begin{cases} 3x-5xy+1=0 \\ y-4x-2=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x-5xy+1=0 \\ y-4x+2=0 \end{cases}$$

Такие системы очень легко решаются методом подстановки.

**Самое главное при решении систем уравнений такого типа не сделать типичную ошибку – не сокращайте на одинаковую переменную – вы потеряете корни!**

**ПРИМЕР.** *Решите систему уравнений* $\begin{cases} x^2-xy=4x-4y \\ 2x^2-xy-4=0 \end{cases}$.

В первом уравнении системы в правой и левой части можно вынести общие множители за скобки

$$x^2-xy=4x-4y \;\Rightarrow\; x(x-y)=4(x-y)$$

**Ни в коем случае не сокращаем на скобку ($x - y$)!!! Если сократим, то потеряем корни!!!** Перенесем слагаемое из правой части уравнения в левую и вынесем множитель ($x - y$) за скобки. Получим

$$x(x-y)-4(x-y)=0 \;\Rightarrow\; (x-y)(x-4)=0$$

Наша система примет вид $\begin{cases}(x-y)(x-4)=0\\2x^2-xy-4=0\end{cases}$. Мы всегда помним, что произведение равно 0, если один из множителей равен 0. Поэтому мы получаем совокупность из двух систем уравнений:

$$\begin{cases}x-y=0\\2x^2-xy-4=0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}x-4=0\\2x^2-xy-4=0\end{cases}$$

**ПРИМЕР.** *Решите систему уравнений* $\begin{cases}3x^2-5xy-6x+10y=0\\7x+6y=32\end{cases}$.

Конечно же можно выразить переменную из второго уравнения и подставить в первое, но мы поступим немного иначе. Постараемся произвести группировку в первом уравнении

$$3x^2-5xy-6x+10y=0 \;\Rightarrow\; x(3x-5y)-2(3x-5y)=0 \;\Rightarrow\; (3x-5y)(x-2)=0 .$$

Наша система примет вид

$$\begin{cases}(3x-5y)(x-2)=0\\7x+6y=32\end{cases}.$$

А дальше как в примере выше.

**ПРИМЕР.** *Решите систему уравнений* $\begin{cases}x^2y-3x-9xy+27=0\\\dfrac{3(x+y)-28}{x-9}=2\end{cases}$.

Надо увидеть группировку в первом уравнении системы

$$x^2y-3x-9xy+27=0 \;\Rightarrow\; xy(x-9)-3(x-9)=0 \;\Rightarrow\; (xy-3)(x-9)=0$$

Дальше как и в примерах выше.

| **Тест 2.03.01.** Решите системы уравнений | |
|---|---|
| **1.** $\begin{cases}2x^2-3xy+5y=5\\(x-2)(y-1)=0\end{cases}$ | **5.** $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=9\\4x^2+xy+4y^2=18\end{cases}$ |
| **2.** $\begin{cases}4x^2+y^2-2xy=7\\(2x-y)y=y\end{cases}$ | **6.** $\begin{cases}(x+4)(y-1)=x^2+5x+4\\x^2-y^2-3x+8=0\end{cases}$ |
| **3.** $\begin{cases}x^2-5y^2-3x-y+22=0\\(x-3)(y-2)=y^2-3y+2\end{cases}$ | **7.** $\begin{cases}9x^2+6xy-3x-2y=0\\3x+8y=36\end{cases}$ |
| **4.** $\begin{cases}x^2+y^2+2x+2y=23\\x^2+y^2+2xy=9\end{cases}$ | **8.** $\begin{cases}x^2y+9x-9xy=81\\\dfrac{2x+3y-15}{x-9}=1\end{cases}$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2;3), (0;1), (1,5; 1) | $\left(\frac{\sqrt{7}}{2};0\right),\left(-\frac{\sqrt{7}}{2};0\right)$ $(-1;-3),\left(\frac{3}{2};2\right)$ | $(0;2),(3;2)$ $(2+\sqrt{5};\sqrt{5})$ $(2-\sqrt{5};-\sqrt{5})$ | (–1;4), (4;–1), (–5;2); (2;–5) | (2;–1), (–1;2), (–2;1); (1;–2) | $(-4;6)$ $(-4;-6)$ $\left(\frac{4}{7};2\frac{4}{7}\right)$ | $(-4;6)$ $\left(\frac{1}{3};\frac{35}{8}\right)$ | (–3; 3) |

| **Тест 2.03.02.** Решите системы уравнений | |
|---|---|
| **1.** $\begin{cases} x^2+y^2-x=2 \\ (x-1)(y+3)=2x^2-x-1 \end{cases}$ | **3.** $\begin{cases} (x+4)(y-1)=x^2+5x+4 \\ x^2-y^2-3x+8=0 \end{cases}$ |
| **2.** $\begin{cases} 2x^2-xy-3x=7 \\ 2x^2+x-3=(x-1)(y+5) \end{cases}$ | **4.** $\begin{cases} (x-2)(y+2)=0 \\ x^2+2y^2-3x=5 \end{cases}$ |
| | **5.** $\begin{cases} 3x-5xy+1=0 \\ (y-4x)^2=4 \end{cases}$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $\left(1;\sqrt{2}\right),\left(1;-\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{9+\sqrt{41}}{10};\frac{-1+\sqrt{41}}{5}\right)$ $\left(\frac{9-\sqrt{41}}{10};\frac{-1-\sqrt{41}}{5}\right)$ | $(1;-8)$, $(-7;-16)$ | $(-4;\pm6)$, $\left(\frac{4}{7};2\frac{4}{7}\right)$ | $\left(2;\pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ | $\left(\frac{-7-\sqrt{129}}{40};\frac{13-\sqrt{129}}{10}\right),\left(\frac{-7+\sqrt{129}}{40};\frac{13+\sqrt{129}}{10}\right)$ $\left(\frac{13+\sqrt{249}}{40};\frac{-7+\sqrt{249}}{10}\right),\left(\frac{13-\sqrt{249}}{40};\frac{-7-\sqrt{249}}{10}\right)$ |

# 2.04. Сложение и вычитание

Метод сложения (вычитания) используют в том случае, если в результате сложения (вычитания) уравнений системы, будет получено новое уравнение, которое будет проще для преобразований, чем исходные.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ 2x^2-y^2+2x-y=4 \end{cases}$

При решении данной системы надо увидеть, что коэффициенты при $y^2$ и $y$ одинаковы по величине, но разные по знаку в разных уравнениях. Поэтому если мы складываем уравнения друг с другом, то переменная $y$ исчезнет без лишних усилий. Получим

$$\left(x^2+y^2+x+y\right)+\left(2x^2-y^2+2x-y\right)=2+4 \;\Rightarrow\; 3x^2+3x-6=0 \;\Rightarrow\; x^2+x-2=0$$

Решаем простое квадратное уравнение. Находим корни. Потом подстановкой находим соответствующие им $y$. В какое из уравнений подставлять $x$? В любое, так как для нахождения $x$ мы использовали оба уравнения системы.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} x^2+y^2+2x=23-2y \\ 2x^2+2y^2+5y=27+3x \end{cases}$

Попробуем проанализировать значения коэффициентов. В этой систему коэффициенты как при $y^2$ и $y$ так и при $x^2$ и $x$ не одинаковы. Однако видно, что коэффициенты при $y^2$ и $x^2$ отличаются в два раза. Поэтому домножим первое уравнение на 2 и вычтем второе уравнение из первого. Получим

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+4x=46-4y \\ 2x^2+2y^2+5y=27+3x \end{cases} \Rightarrow\; 2x^2+2y^2+4x-\left(2x^2+2y^2+5y\right)=46-4y-\left(27+3x\right)$$

$$2x^2+2y^2+4x-2x^2-2y^2-5y=46-4y-27-3x \;\Rightarrow\; 4x-5y=29-4y-3x \;\Rightarrow\; y=7x-29$$

Теперь подставляем $y=7x-29$ в любое из уравнений (можно в первое, а можно и во второе, это не принципиально, так как для получения этого соотношения мы использовали оба уравнения). Дальнейшее решение очевидно.

Это уравнение можно решить немного по–другому. Так как при вычитании выражений можно ошибиться, то мы домножим первое уравнение на –2 и потом выполним сложение уравнений, а не вычитание:

$$\begin{cases} -2x^2-2y^2-4x=-46+4y \\ 2x^2+2y^2+5y=27+3x \end{cases} \Rightarrow \ -2x^2-2y^2-4x+2x^2+2y^2+5y=-46+4y+27+3x$$

$$-4x+5y=-46+4y+27+3x \ \Rightarrow \ y=-29+7x$$

Мы получили точно такую же связь.

**ПРИМЕР.** *Решим систему уравнений* $\begin{cases} 3x^2+3y^2-11x-7y+10=0 \\ x^2+y^2-4x-3y=-5 \end{cases}$

Опять анализируем значения коэффициентов. В этой систему коэффициенты как $y^2$ и при $x^2$ не одинаковы. Однако видно, что коэффициенты отличаются в три раза. Поэтому домножим второе уравнение на 3. Получим

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-11x-7y+10=0 \\ 3x^2+3y^2-12x-9y+15=0 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнение второе. Получим

$$x+2y-5=0 \ \Rightarrow \ x=5-2y.$$

Теперь мы можем подставить *x* в любое из уравнений. Я бы рекомендовал подставлять в уравнение, где меньше коэффициенты (легче потом будет преобразовывать), то есть во второе уравнение системы. Получим новую систему

$$\begin{cases} x=5-2y \\ x^2+y^2-4x-3y=-5 \end{cases}$$

**Ответ:** (3;1), (1;2).

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} x^2+xy=15 \\ y^2+xy=10 \end{cases}$.

Учимся видеть на пару ходов вперед. Если мы складываем уравнения системы, то в левой части получим формулу сокращенного умножения – квадрат суммы. При этом с правой стороны получится 25, которое можно представить $5^2$. как Значит складываем

$$x^2+xy+y^2+xy=15+10 \ \Rightarrow \ x^2+2xy+y^2=25 \ \Rightarrow \ (x+y)^2=5^2$$

Получаем два уравнения: $x+y=5$ и $x+y=-5$. Значит, получаем две новые системы

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y^2+xy=10 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=-5 \\ y^2+xy=10 \end{cases}$$

Дальше все просто.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ xy=8 \end{cases}$

Конечно, можно из второго уравнения выразить любую из неизвестных и подставить в первое. Так тоже можно решить данную систему, но такое решение нельзя назвать простым и быстрым. Можно сделать проще. Домножим второе уравнение на 2 и складываем оба равнения системы. Получим

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ 2xy=16 \end{cases} \Rightarrow \ x^2+2xy+y^2=36 \ \Rightarrow \ (x+y)^2=6^2 \ \Rightarrow \ \begin{matrix} x+y=6 \\ x+y=-6 \end{matrix}$$

Таким образом, получаем две простых системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=-6 \end{cases}$$

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ x^2-2xy+1=0 \end{cases}$

Складываем уравнения системы. Получим

$$x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1=0 \;\Rightarrow\; (x-y)^2+(x-1)^2=0$$

Какие решения могут быть у такого уравнения? **Очевидно, что сумма двух неотрицательных чисел (ведь любое число, возведенное в вторую степень, будет неотрицательным, то есть либо положительным либо равным 0) будет равна 0 только тогда, когда каждое из чисел равно 0.** Следовательно, $x = 1$. Откуда $y = 1$ (чтобы первая скобка была равна 0). Это и есть решение системы.

**ПРИМЕР.** *Решите систему уравнений* $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=7 \\ z+x=2 \end{cases}$.

Складываем все три уравнения. Получаем $2x+2y+2z=12$. Сокращаем на 2 и получаем $x+y+z=6$. А теперь устно. Так как по условию $x+y=3$, то $z=3$. Остальные корни находим аналогично.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$

Мы уже решали это же уравнение методом подстановки. Теперь решим его другим методом. Складываем первые два уравнения и вычитаем из них третье. Зачем? Надо увидеть, что в первых двух у нас просто $z$, а в третьем $2z$. В результате наших действий $z$ сократится. Получим

$$(2x+y+z)+(x+2y+z)-(x+y+2z)=7+8-9 \;\Rightarrow\; 2x+2y=6 \;\Rightarrow\; x+y=3$$

Подставим это в третье уравнение. Получим: $3+2z=9 \;\Rightarrow\; z=3$. Дальше решить систему уже не составит труда. Опять обращу Ваше внимание на то, что ответ не зависит от метода решения системы.

**Тест 2.04.01.** Решите системы уравнений

**1.** $\begin{cases} x^2+3y+y^2-2x=9 \\ 2x^2+2y^2+x-5y=1 \end{cases}$.

**2.**: $\begin{cases} x^2+3xy=18 \\ xy+4y^2=7 \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} 3x^2+xy-2x+y-5=0 \\ 2x^2-xy-3x-y-5=0 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} x^4+x^2y^2=20 \\ y^4+x^2y^2=5 \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} 3x^2+3y^2-11x-7y+10=0 \\ x^2+y^2-4x-3y+5=0 \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} 5x^2-3y^2+10x-12y=17 \\ 2x^2+y^2+4x+4y=-2 \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} x^2-xy=6 \\ y^2-xy=3 \end{cases}$

**8.** $\begin{cases} x+5y+2z=5 \\ 2x+3y+4z=3 \\ 3x+4y+2z=8 \end{cases}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1; 2), (–239/146; 117/146). | $(3;1),(-3;-1)$ $\left(12;-\frac{7}{2}\right);\left(-12;\frac{7}{2}\right)$ | (2;–1), (–1;t), где t – любое число | (2;1), (–2;–1), (–2;1), (2;–1) | (3;1), (1;2) | $(-1+\sqrt{2};-2)$ $(-1-\sqrt{2};-2)$ | (2;–1), (–2; 1) | (2; 1; –1) |

**Тест 2.04.02.** Решите системы уравнений

**1.** $\begin{cases} x^2+xy=15 \\ y^2+xy=10 \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} x^2-x+1=y \\ y^2-y+1=x \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} xy-x+y=7 \\ xy+x-y=13 \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} x^2+y^2+2x=23-2y \\ 2x^2+2y^2+5y=27+3x \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} y+z-x=2 \\ z+x-y=8 \\ x+y-z=12 \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} 2x^2-5xy+3x-2y=2 \\ 5xy-2x^2+7x-8y=-22 \end{cases}$

| | |
|---|---|
| **4.** $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ 2x^2-y^2+2x-y=4 \end{cases}$ | **8.** $\begin{cases} x^2+2y=8 \\ y^2+2x=8 \end{cases}$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(3;2)$ $(-3;-2)$ | $(1;1)$ | $(5;2)$ $(-2;-5)$ | $(-2;0);(-2;1)$ $(1;0),(1;-1)$ | $(2;-5)$ $(3;2)$ | $(10;7;5)$ | $(-1;1)$ $(-2;0)$ | $(2;\ 2)$, $(-4;\ -4)$ $\left(1-\sqrt{5};\ 1+\sqrt{5}\right)$, $\left(1+\sqrt{5};\ 1-\sqrt{5}\right)$ |

# 2.05. Умножение и деление

Если системы уравнений можно решать методом сложения (вычитания), то почему их нельзя решать методом умножения (деления)? Еще одним способом решения систем уравнений является деление или умножение одного уравнения на другое. Обратите внимание, что делить одно уравнение на другое нужно, если одно или оба уравнения записаны в виде произведения множителей и один из множителей присутствует как в первом так и во втором уравнении системы. Очевидно, что при делении этот множитель будет сокращаться.

**ПРИМЕР.** *Решим систему уравнений* $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y^6+y^4x^2=80 \end{cases}$

Надо увидеть, что во втором уравнении мы можем вынести $y^4$ за скобки, а в первом вынесем 1 (мы выносим 1 только для того, чтобы визуально нам было проще воспринимать уравнения). Получим

$$\begin{cases} 1\cdot\left(x^2+y^2\right)=5 \\ y^4\left(y^2+x^2\right)=80 \end{cases}$$

И в первом и во втором уравнении присутствует множитель $\left(x^2+y^2\right)$. Мы будем делить второе уравнение на первое, так как при делении 80 на 5 получается целое число

$$\frac{y^4\left(y^2+x^2\right)}{x^2+y^2}=\frac{80}{5} \;\Rightarrow\; y^4=16 \;\Rightarrow\; y_1=2 \;\text{ и }\; y_2=-2$$

Мы получаем две системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=-2 \end{cases}$$

Обращаю ваше внимание, что из двух уравнений оригинальной системы я выбрал $x^2+y^2=5$, так как оно проще второго и при подстановке в него *y* нам надо будет сделать меньше вычислений. Решать такие системы надо очень аккуратно

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2^2=5 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 & y=2 \\ x=-1 & y=2 \end{matrix}$$

Мы получили, что $y_1=2$ соответствует два значения переменной *x*. Аналогичная ситуация нас ждет для $y_2=-2$. Всего мы получим 4 решения.

Этот пример можно решить и без деления. После вынесения $y^4$ за скобки получим

Надо увидеть, что во втором уравнении мы можем вынести $y^4$ за скобки, а в первом вынесем 1 (мы выносим 1 только для того, чтобы визуально нам было проще воспринимать уравнения). Получим

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y^4\left(y^2+x^2\right)=80 \end{cases}$$

Так как $x^2+y^2=5$, мы можем подставить это значение во второе уравнение. Получим

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y^4\left(y^2+x^2\right)=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y^4\cdot 5=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y^4=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y_1=2,\ y_2=-2 \end{cases}$$

Мы пришли к такому же ответу. Только сделали это не через деление, а через подстановку.
**Ответ:** (1;2), (–1;2), (1;–2), (–1;–2).

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} x+y=3 \\ x^3+x^2y=12 \end{cases}$

Надо увидеть, что во втором уравнении можно вынести $x^2$ за скобки. Получим

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2\left(x+y\right)=12 \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое. Получим

$$\frac{x^2\left(x+y\right)}{x+y}=\frac{12}{3} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{matrix}$$

Получим две системы

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x=2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

При решении этой системы мы так же могли использовать метод подстановки

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2\left(x+y\right)=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x^2\cdot 3=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x_1=2,\ x_2=-2 \end{cases}$$

**ПРИМЕР.** *Решите систему уравнений* $\begin{cases} x^8y^6=64 \\ x^6y^8=256 \end{cases}$.

Для решения этого примера нам надо вспомнить одно из основных свойств показательно функции: $a^{m+n}=a^ma^n$. Разделим второе уравнение на первое

$$\frac{x^6y^8}{x^8y^6}=\frac{256}{64} \Rightarrow \frac{x^6y^6y^2}{x^6x^2y^6}=4 \Rightarrow \frac{y^2}{x^2}=4 \Rightarrow y^2=4x^2.$$

Тогда $y=2x$ и $y=-2x$. И опять мы получаем две системы

$$\begin{cases} x^8y^6=64 \\ y=2x \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^8y^6=64 \\ y=-2x \end{cases}$$

Дальше решаем как в примере выше.
**Ответ:** (1;2), (–1;–2), (1;–2), (–1;2).

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=12 \\ x^2y^3-x^3y^2=4 \end{cases}$

Немного преобразуем систему. В обоих уравнениях вынесем общие множители за скобки

$$\begin{cases} x^2y^2\left(y+x\right)=12 \\ x^2y^2\left(y-x\right)=4 \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе

$$\frac{x^2y^2\left(y+x\right)}{x^2y^2\left(y-x\right)}=\frac{12}{4} \Rightarrow \frac{y+x}{y-x}=\frac{3}{1}$$

По свойству пропорции $y+x=3y-3x \Rightarrow 4x=2y \Rightarrow y=2x$. Мы получили новую систему

$$\begin{cases} y=2x \\ x^2y^3-x^3y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2y^2\left(y-x\right)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2\left(2x\right)^2\left(2x-x\right)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ 4x^4\cdot x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^5=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x=1 \end{cases}$$

**Ответ:** (1;2)

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases}(x-y)xy=30\\(x+y)xy=120\end{cases}$

Сразу делим второе уравнение на первое

$$\frac{(x+y)xy}{(x-y)xy}=\frac{120}{30}\ \Rightarrow\ \frac{x+y}{x-y}=\frac{4}{1}\ \Rightarrow\ 4x-4y=x+y\ \Rightarrow\ 3x=5y\ \Rightarrow\ y=\frac{3}{5}x$$

Подставим полученный $y$ во второе уравнение

$$\left(x+\frac{3}{5}x\right)x\cdot\frac{3}{5}x=120\ \Rightarrow\ \frac{8}{5}\cdot\frac{3}{5}x^3=120\ \Rightarrow\ x^3=5^3\ \Rightarrow\ x=5\Rightarrow\ y=3$$

**Ответ:** (5;3)

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases}x^2-xy=28\\y^2-xy=-12\end{cases}$

Преобразуем исходные уравнения

$$\begin{cases}x(x-y)=28\\y(y-x)=-12\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x(x-y)=28\\-y(x-y)=-12\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x(x-y)=28\\y(x-y)=12\end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе. Получим

$$\frac{x(x-y)}{y(x-y)}=\frac{28}{12}\ \Rightarrow\ \frac{x}{y}=\frac{7}{3}\ \Rightarrow\ y=\frac{3}{7}x$$

Дальше как в примерах выше.

**Ответ:** (7;3), (–7;–3)

**ПРИМЕР.** *Решите систему уравнений* $\begin{cases}2x^2-xy-3y^2+x+y=6\\2x^2-5xy+3y^2+x-y=2\end{cases}$.

Это сложная система, так как не все могут догадаться сделать преобразование, которое приведет к группировке. И преобразования надо сделать как в первом, так и во втором уравнениях.

Сначала поработаем с первым уравнением. Надо догадаться представить $-3y^2=-y^2-2y^2$. Во втором уравнении $-5xy=-2xy-3xy$. Наша система примет вид

$$\begin{cases}2x^2-xy-y^2-2y^2+x+y=6\\2x^2-2xy-3xy+3y^2+x-y=2\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}2(x^2-y^2)-y(x+y)+(x+y)=6\\2x(x-y)-3y(x-y)+(x-y)=2\end{cases}$$

Вынесем общие множители за скобки. Получим

$$\begin{cases}(x+y)(2x-2y-y+1)=6\\(x-y)(2x-3y+1)=2\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}(x+y)(2x-3y+1)=6\\(x-y)(2x-3y+1)=2\end{cases}$$

А вот теперь мы можем спокойно разделить первое уравнение на второе

$$\frac{(x+y)}{(x-y)}=3\ \Rightarrow\ x+y=3x-3y\ \Rightarrow\ x=2y.$$

Полученное значение мы можем подставить в любое из исходных уравнений.

**ПРИМЕР.** *Решите систему уравнений* $\begin{cases}x^2+3xy+x+3y=8\\3y^2+xy-2x-6y=-4\end{cases}$.

И опять надо увидеть группировку.

$$\begin{cases}x^2+3xy+x+3y=8\\3y^2+xy-2x-6y=-4\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x(x+3y)+1\cdot(x+3y)=8\\y(3y+x)-2(x+3y)=-4\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}(x+3y)(x+1)=8\\(x+3y)(y-2)=-4\end{cases}.$$

Теперь можно делить первое уравнение на второе

$$\frac{(x+3y)(x+1)}{(x+3y)(y-2)}=\frac{8}{-4}\ \Rightarrow\ \frac{x+1}{y-2}=\frac{-2}{1}\ \Rightarrow\ 1\cdot(x+1)=-2\cdot(y-2)\ \Rightarrow\ x=-2y+3$$

Вы наверное уже заметили, что мы пока что постоянно делим и ни разу умножили уравнения. На самом деле в 99% работает именно деление. Очень редко попадаются примеры, где уравнения надо умножать.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} x^2y^3 = 16 \\ x^3y^2 = 2 \end{cases}$

А вот тут можно как делить так и умножать. Умножим уравнения друг на друга: $x^5y^5 = 2^5 \;\Rightarrow\; xy = 2$

Получаем новую систему: $\begin{cases} xy = 2 \\ x^2y^3 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ x^2y^2y = 16 \end{cases} \Rightarrow (xy)^2\,y = 16 \Rightarrow 4y = 16$

$$y = 4 \;\Rightarrow\; x \cdot 4 = 2 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}$$

**Ответ:** (0,5;4)

**ПРИМЕР.** *Решите систему уравнений*: $\begin{cases} xy = 1 \\ yz = 2 \\ zx = 8 \end{cases}$.

В принципе в этой системе можно разделить второе уравнение на первое и результат подставить в третье уравнение. Но мы сделаем немного иначе. Перемножим все три уравнения. Получим

$$x^2y^2z^2 = 16 \;\Rightarrow\; \begin{cases} xyz = 4 \\ xyz = -4 \end{cases}$$

Теперь надо рассмотреть оба случая.
1. Так как по условию $xy = 1$, то $z = 4$ и мы легко находим соответствующие $x$ и $y$.
2. Так как по условию $xy = 1$, то $z = -4$ и мы легко находим соответствующие $x$ и $y$.

**Тест 2.05.01.** Решите системы уравнений

**1.** $\begin{cases} x^2 + xy = 4y \\ y^2 + yx = 4x \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} xy^3 + x^3y = -10 \\ x^2y^4 + x^4y^2 = 20 \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} (x-y)(9-x) = 10 \\ (x-y)(12-y) = 20 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} (x+y)^3(x-y)^2 = 27 \\ (x-y)^3(x+y)^2 = 9 \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} xy + yz = 3 \\ yz + zx = 10 \\ zx + xy = 9 \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} \dfrac{yz}{x} = 6 \\ \dfrac{zx}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{xy}{z} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} x^5y^7 = 32 \\ x^7y^5 = 128 \end{cases}$

**8.** $\begin{cases} xy = 2 \\ yz = -6 \\ zx = -3 \end{cases}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (0; 0), (2; 2) | (2;–1), (–2;1), (1;–2), (–1;2) | (4;2), (11;16) | (2;1) | $\left(2;\frac{1}{2};4\right);\left(-2;-\frac{1}{2};-4\right)$ | (1;2;3), (–1;–2;3), (–1;2;–3), (1;–2;–3) | (2;1) (–2;–1) | (–1; –2; 3), (1; 2; –3) |

**Тест 2.05.02.** Решите системы уравнений

**1.** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^6 + y^4x^2 = 80 \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} xy = 1 \\ yz = 2 \\ zx = 8 \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} (x+y)(y+z) = 1 \\ (y+z)(z+x) = 1 \\ (z+x)(x+y) = 4 \end{cases}$

| | |
|---|---|
| **3.** $\begin{cases} x^8y^6 = 64 \\ x^6y^8 = 256 \end{cases}$ <br> **4.** $\begin{cases} x^2+3xy+x+3y=8 \\ 3y^2+xy-2x-6y=-4 \end{cases}$ | **7.** $\begin{cases} 2xy+6x-y^2-3y=14 \\ 2x^2+4x-xy-2y=35 \end{cases}$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(5;3)$ | $(1;2),(1;-2)$ <br> $(-1;2),(-1;-2)$ | $(1;2),(1;-2)$ <br> $(-1;2),(-1;-2)$ | $(1;1),$ <br> $(7;-2)$ | $\left(2;\frac{1}{2};4\right)$ <br> $\left(-2;-\frac{1}{2};-4\right)$ | $\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ <br> $\left(-\frac{7}{4};-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$ | $(3;-1)$ <br> $\left(-6\frac{3}{8};-4\frac{3}{4}\right)$ |

# 2.06. Сложные системы. Замена переменных

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144 \\ x^2+4x+5y=24 \end{cases}$

В этом примере надо **увидеть** группировку. Немного преобразуем уравнения системы. В первом уравнении внесем $x$ в первую скобку, а во втором разложим $4x$ на два слагаемых ($x$ и $3x$). Получим

$$\begin{cases} (x^2+x)(3x+5y)=144 \\ x^2+x+3x+5y=24 \end{cases}$$

Пусть $x^2+x=a$ и $3x+5y=b$. Тогда наша система примет вид: $\begin{cases} ab=144 \\ a+b=24 \end{cases}$. Решаем систему методом подстановки. Получаем $\begin{cases} a=12 \\ b=12 \end{cases}$. Далее все просто:

$$\begin{cases} x^2+x=12 \\ 3x+5y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-4 \end{array}\right. \\ 3x+5y=12 \end{cases}$$

Подставляя значения $x$ во второе уравнение находим значения $y$.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$

Да, можно выразить $x$ из первого уравнения и подставить во второе. Но есть способ проще. К тому же метод, с которым вы сейчас познакомитесь, можно успешно применять при решении более сложных систем. Пусть $\dfrac{x}{y}=t$. Тогда первое уравнение системы примет вид

$$t+\frac{1}{t}=\frac{13}{6} \Rightarrow 6t^2+6=13t \Rightarrow 6t^2-13t+6=0 \Rightarrow \begin{array}{l} t_1=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3} \\ t_2=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2} \end{array}$$

На этом этапе решения мы можем забыть про первое уравнение системы, так как мы его использовали для получения связи между $x$ и $y$. Получаем две простых системы, которые решаются без проблем.

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x \\ x+y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x \\ x+y=5 \end{cases}$$

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Пусть $\dfrac{2}{x}=a$, $\dfrac{y}{3}=b$. Тогда:

$$\begin{cases} a+b=3 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ \dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

Получаем две простые системы, которые решаются метом подстановки.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{13}{6} \\ xy=5 \end{cases}$

Пусть $\dfrac{x+y}{x-y}=t$. Тогда

$$t+\frac{1}{t}=\frac{13}{6} \Rightarrow 6t^2-13t+6=0 \Rightarrow t=\frac{2}{3} \text{ и } t=\frac{3}{2}$$

Получаем две простые системы, которые решаются метом подстановки

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} 12(x+y)^2+x=2{,}5-y \\ 6(x-y)^2+x=0{,}125+y \end{cases}$

Перенесем в обоих уравнениях все слагаемые в левую часть:

$$\begin{cases} 12(x+y)^2+(x+y)-2{,}5=0 \\ 6(x-y)^2+(x-y)-0{,}125=0 \end{cases}.$$

Делаем замену $x+y=a$ и $x-y=b$. Получаем новую систему

$$\begin{cases} 12a^2+a-2{,}5=0 \\ 6b^2+b-0{,}125=0 \end{cases}$$

которая легко решается методом подстановки. После решения этой системы как обычно делаем обратную замену.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2-xy}+\dfrac{4}{y^2-xy}=-\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{7}{x^2-xy}-\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{6}{5} \end{cases}$

Сначала немного преобразуем уравнения системы:

$$\begin{cases} 5\cdot\dfrac{1}{x^2-xy}+4\cdot\dfrac{1}{y^2-xy}=-\dfrac{1}{6} \\ 7\cdot\dfrac{1}{x^2-xy}-3\cdot\dfrac{1}{y^2-xy}=\dfrac{6}{5} \end{cases}.$$

Пусть $\dfrac{1}{x^2-xy}=a$, $\dfrac{1}{y^2-xy}=b$, тогда наша система с учетом замены примет вид:

$$\begin{cases} 5a+4b=-\dfrac{1}{6} \\ 7a-3b=\dfrac{6}{5} \end{cases}.$$ Решаем систему методом подстановки.

**ПРИМЕР.** *Решите систему* $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9 \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20 \end{cases}$

Пусть $x+y=a$, $\dfrac{x}{y}=b$. Тогда

$$\begin{cases} a+b=9 \\ a\cdot b=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases}$$

Получаем две простые системы, которые решаются метом подстановки

**Тест 2.06.01.** Решите системы уравнений

**1.** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} \dfrac{1}{2x+y}+x=3 \\ \dfrac{x}{2x+y}=-4 \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} x^2y-xy^2=6 \\ xy+x-y=-5 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2} \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+3y}+\dfrac{x+3y}{xy}=2 \\ \dfrac{xy}{x-y}+\dfrac{x-y}{xy}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} x(x+1)(3x^2+5y)=144 \\ 4x^2+x+5y=24 \end{cases}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| (2;3),(3;2),<br>(–2;–3)<br>(–3;–2) | $\left(-1;\dfrac{9}{4}\right)$,(4;–9) | (–1;2),(–2;1) | $(-3\sqrt{2};-\sqrt{2}),(-3\sqrt{2};\sqrt{2})$<br>$(3\sqrt{2};-\sqrt{2}),(3\sqrt{2};\sqrt{2})$ | $\left(8;\dfrac{8}{5}\right),\left(-4;\dfrac{4}{7}\right)$ | (3;–3)<br>(–4;–7,2) |

**Тест 2.06.02.** Решите системы уравнений

**1.** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12} \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+6\dfrac{x-y}{x+y}=5 \\ xy=2 \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $(3;2),(-3;-2)$ | (4;3), (–4;–3) | $\left(-\dfrac{19}{8};-\dfrac{13}{8}\right)$<br>$(2;1)$ | (2;1), (–2;–1),<br>$(\sqrt{6};\sqrt{\dfrac{2}{3}}),(-\sqrt{6};-\sqrt{\dfrac{2}{3}})$ | $\left(\dfrac{11}{13};-\dfrac{24}{5}\right)$ | $(3;2),(2;3)$<br>$(-6;1),(1;-6)$ |

А вот теперь самое интересное – итоговый тест. В заданиях ЦТ не будет указано каким способом вы должны их решать. Вам просто предложат решить систему уравнений и записать в ответ корни (сумму корней, произведение корней) и все. Поэтому очень важно научиться быстро определять метод, которым вы будете решать систему. При выборе метода решения мы всегда будем стараться идти по пути наименьшего сопротивления. Это значит, что сначала мы пробуем решить систему наиболее простым способом – подстановкой. Не получилось? Думаем про метод сложения, деления и т.д.

**Итоговый тест 1.** Решите системы уравнений

**1.** $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0 \\ x+y+8=0 \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} x^2+2xy=-3 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} xy=2 \\ yz=-6 \\ zx=-3 \end{cases}$.

**4.** $\begin{cases} x+y=\dfrac{21}{8} \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{35}{6} \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} \dfrac{xy}{z}=\dfrac{6}{5}; \quad \dfrac{yz}{x}=\dfrac{10}{3}; \quad \dfrac{zx}{y}=\dfrac{15}{2} \end{cases}$.

6. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{26}{5} \\ xy=6 \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=-5 \\ 3x^2+xy=21 \end{cases}$.

**8.** $\begin{cases} x^2+xy+2x+y=7 \\ xy+y^2+x+2y=11 \end{cases}$.

**9.** $\begin{cases} x^2+3xy=54 \\ 4y^2+xy=115 \end{cases}$

| **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | **6.** | **7.** | **8.** | **9.** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (–6;–2);<br>(–4;–4) | (–1;2)<br>(–0,6; 2,8) | (–1; –2; 3),<br>(1; 2; –3) | $\left(\frac{9}{4};\frac{3}{8}\right)$<br>$\left(-\frac{21}{40};\frac{63}{20}\right)$ | (3; 2; 5)<br>(3; –2; –5)<br>(–3; –2; 5)<br>(–3; 2; –5). | (3; 2)<br>(–3; –2) | (3;–2)<br>(–7;18)<br>(–3; 2)<br>(7;–18) | (1; 2),<br>(–2,6; –3,4) | (3;5)<br>(36;–11,5)<br>(–36;11,5)<br>(–3;–5) |

**Итоговый тест 2.** Решите системы уравнений

**1.** $\begin{cases} 2x^2+xy-14=0 \\ 3x-y-3=0 \end{cases}$.

**2.** $\begin{cases} x^2+2y=-5 \\ 3y^2+2x^2=29 \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} xy^2+2xy+8y+16=0 \\ \dfrac{x+5y+6}{y+2}=4 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} x^2(x+y)=80 \\ x^2(2x-3y)=80 \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} 2\dfrac{x}{y}+3\dfrac{y}{x}=5 \\ 2x^2+y^2=3 \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} x^2+xy=4 \\ y^2+xy=12 \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} 2x-3y-xy=4 \\ 3x+y+3xy=3 \end{cases}$.

**8.** $\begin{cases} xy=2 \\ 9x^2+y^2=13 \end{cases}$.

**9.** $\begin{cases} x^2+y^2+x-3y=2 \\ x^2+y^2-5x-y=2 \end{cases}$.

**10.** $\begin{cases} 3\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=-2 \\ x^2-y^2=-8 \end{cases}$.

**11.** $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-2y}-3\dfrac{x-2y}{x+2y}=2 \\ xy=4 \end{cases}$

| **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | **6.** | **7.** | **8.** | **9.** | **10** | **11** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2;3)<br>(–1,4; –7,2) | (1;–3)<br>(–1;–3) | (–2; 4) | (4;1) | (1; 1), (–1; –1),<br>$\left(3\sqrt{\frac{3}{22}};\sqrt{\frac{6}{11}}\right)$<br>$\left(-3\sqrt{\frac{3}{22}};-\sqrt{\frac{6}{11}}\right)$ | (–1;–3)<br>(1;3) | $\left(\frac{13}{9};-\frac{1}{4}\right)$<br>(–1;–3) | $\left(\frac{2}{3};3\right)$<br>$\left(-\frac{2}{3};-3\right)$ | (1;3),<br>$\left(-\frac{1}{5};-\frac{3}{5}\right)$ | (1;3),<br>(–1;–3) | (4; 1)<br>(–4; –1) |