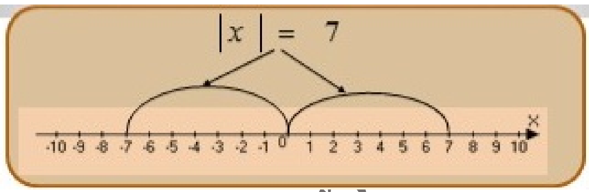
Тема 03.
Уравнения с модулем

Содержание

3.01. Модуль

Абсолютной величиной (модулем) числа *x* называется расстояние на координатной прямой от точки *x* до начала координат. Расстояние это всегда неотрицательная величина. Например, $|x| = 7$. Это значит, что $x = 7$ и $x = -7$.



Модулем числа *x* является число *x*, если *x* ≥ 0, и число обратное числу *x*, если *x* < 0

$$|x| = \begin{cases} x, & если \quad x \geq 0 \\ -x, & если \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ПРИМЕР. $|117| = 117, \quad |-98| = -(-98) = 98$

Грубая и очень короткая математическая суть модуля: **модуль из любого числа делает не отрицательное число.** То есть если число положительное, то мы модуль можем просто опустить и заменить его скобками. На положительные числа модуль не имеет никакого действия. Если же число отрицательное, то модуль сделает из этого числа положительное. То есть убирая знак модуля и заменяя его скобками мы обязательно поменяем знак перед подмодульным выражением на противоположный.

ПРИМЕР. *Раскройте модуль* $\left|\sqrt{8} - 3\right|$.

Что определить знак числа под модулем нам важно понять что больше: 3 или $\sqrt{8}$. Как это выяснить? Возведем во вторую степень 3 и $\sqrt{8}$. Получим

$$3^2 = 9, \quad \left(\sqrt{8}\right)^2 = 8 \;\Rightarrow\; 3 > \sqrt{8}.$$

Следовательно, подмодульное выражение отрицательно! Используем определение модуля. Получим

$$\left|\sqrt{8} - 3\right| = -\left(\sqrt{8} - 3\right) = 3 - \sqrt{8}$$

То есть модуль из отрицательного числа $\sqrt{8} - 3$ сделал положительное $3 - \sqrt{8}$.

Задание для самостоятельного решения. Раскройте модуль

1.$|\pi - 3|$ 2. $\left|\sqrt{3} + \sqrt{5}\right|$ 3.$\left|x^2\right|$ 4.$\left|\sqrt{5} - 2\right|$ 5.$\left|2\sqrt{3} - 13\right|$ 6. $\left|x^4 + 1\right|$ 7. $\left|1 - \sqrt{2}\right|$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\left|5x+4\right|=3$

Очевидно, что равенство будет выполняться только если подмодульное выражение равно 3 или –3:

$$5x+4=3 \text{ и } 5x+4=-3.$$

Откуда несложно получить корни уравнения: $-\frac{1}{5};\ -\frac{7}{5}$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\left|x^2-3x-7\right|=4$

Поступим аналогично предыдущему примеру. Получаем:

$$x^2-3x-7=4 \text{ и } x^2-3x-7=-4.$$

Откуда несложно получить корни уравнения: $3;\ -1;\ \ 1\pm2\sqrt{3}$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\left|\left|3x-5\right|-4\right|=5$

Тут немного сложней. Сначала раскрываем внешний модуль и получаем

$$\left|3x-5\right|-4=5 \text{ и } \left|3x-5\right|-4=-5.$$

Откуда

$$\left|3x-5\right|=9 \text{ и } \left|3x-5\right|=-1.$$

Очевидно, что у второго уравнения нет решений. Ну а первое решим, как и предыдущие примеры.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\left|x^2-x-4\right|+2+x^2=0$. В ответе укажите количество корней.

Немного преобразуем уравнение $\left|x^2-x-4\right|=-2-x^2$. Так как выражение $-2-x^2$ при любом значении *x* отрицательно, а выражение $\left|x^2-x-4\right|$ должно быть больше или равно нулю при любом значении *x*, то это уравнение не имеет корней.

Во всех вышеприведенных примерах в левой части уравнения стояло выражение под модулем, а в правой части – число или выражение, которое при любых значениях переменной *x* не изменяет свой знак. Такие уравнения как вы могли убедиться решаются очень просто. **Однако при решении задач по теме модули вы должны привыкнуть к тому, что ваша задача будет как минимум раздваиваться, а иногда утраиваться и учетверяться (чуть позже увидите), то есть работы всегда будет гораздо больше, чем при решении простых уравнений.**

Тест 3.01.01. Решите уравнения

1. $\left|2x+3\right|=5$

2. $\left|x^2-x-1\right|=1$

3. $\left|x^2+5x+6\right|-2=0$

4. $\left|\left|x\right|+2\right|=2$

5. $\left|x^2-4\right|=-x^2$

6. $\left|2x-3\right|=7$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
1; –4	–1; 0; 1; 2	–1; –4	0	Нет корней	5; -2

Тест 3.01.02. Решите уравнения

1. $\left|x^2-x-5\right|=1$

2. $\left|x^2-4x\right|=4$

3. $\left|\left|x\right|-2\right|=2$

4. $\left|\left|x\right|+2\right|=1$

5. $\left|\left|2x-5\right|-4\right|=5$

6. $\left|2x+4\right|-x^2=1$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
$-2;3$ $\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$	2; $2\pm\sqrt{8}$	4; –4; 0	Нет решений	7; -2	-1; 3

3.02. Простейшие уравнения с модулем

Перейдем к более сложным примерам. Рассмотрим уравнение с модулем вида $|f(x)| = g(x)$, то есть когда неизвестная величина x будет как в подмодульном выражении, так и вне его. Например,

$$x^2+2x+3\frac{|x-1|}{x-1}=0$$

Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$ равносильны следующей совокупности уравнений:

$$|f(x)|=g(x)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{если } f(x)\geq 0,\text{ то } f(x)=g(x)\\ \text{если } f(x)<0,\text{ то } f(x)=-g(x)\end{array}\right.$$

В нашем случае

$$x^2+2x+3\frac{|x-1|}{x-1}=0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x-1\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2+2x+3\dfrac{(x-1)}{x-1}=0\\ \\ x-1<0 \;\Rightarrow\; x^2+2x+3\dfrac{-(x-1)}{x-1}=0\end{array}\right.$$

То есть любое уравнение у нас будет заменено совокупностью из двух уравнений. Первое уравнение для случая, когда подмодульное выражение (не неизвестная величина x, а именно выражение, которое находиться внутри модуля) положительно. В этом случае мы просто убираем модуль и заменяем его скобками. Второе для случая, когда подмодульное выражение отрицательно. Обращаю Ваше внимание на то, **что во втором случае мы обязательно меняем знак перед подмодульным выражением на противоположный**. То есть мы не ставим минус, а именно **меняем** знак.

И не забудьте проверить корни уравнения!!! В первом случае корни должны удовлетворять условию $x - 1 \geq 0$, во втором: $x - 1 < 0$.

По смыслу модуля уравнения такого типа могут иметь решение только в том случае, если правая часть $g(x) \geq 0$ (неотрицательна). В некотором роде это ОДЗ для уравнения.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $x|x|+4x-3=0$.

Мы помним, что возможны два случая, в зависимости от знака подмодульного выражения. Рассмотрим по очереди эти два случая:

1. Подмодульное выражение неотрицательно - в этом случае просто убираем знак модуля.

$$\begin{cases}x\geq 0\\ x\cdot x+4x-3=0\end{cases}.$$

Решаем уравнение $x^2+4x-3=0$ и проверяем корни на соответствие условию раскрытия модуля: $x\geq 0$. Корни уравнения $x_1=-2+\sqrt{7}$ и $x_2=-2-\sqrt{7}$. Первый корень удовлетворяет неравенству $x\geq 0$ и следовательно является решением нашего уравнения, второй корень не удовлетворяет и мы его опускаем.

2. Подмодульное выражение отрицательно - в этом случае убирая модуль мы обязательно **меняем** знак перед подмодульным выражением, то есть в нашем случае ставим перед подмодульным выражением знак «минус», так как изначально там стоял «плюс».

$$\begin{cases}x<0\\ x\cdot(-x)+4x-3=0\end{cases}.$$

Решаем уравнение $-x^2+4x-3=0$ и проверяем корни на соответствие неравенству $x < 0$. Корни уравнения $x_3=3$ и $x_4=1$. Очевидно, что оба эти корня не подходят.

ПРИМЕР. *Решит е уравнение* $(x+2)^2=2|x+2|+3$.

Рассмотрим по очереди два случая:

1. Подмодульное выражение неотрицательно: $x+2\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq -2$. В этом случае мы просто снимаем модуль и заменяем его скобками. Получаем

$$(x+2)^2=2(x+2)+3 \;\Rightarrow\; x^2+4x+4-2x-4-3=0 \;\Rightarrow\; x^2+2x-3=0 \;\Rightarrow\; x_1=1, x_2=-3$$

Второй корень не подходит, так как для корней у нас должно выполняться условие $x\geq -2$.

2. Подмодульное выражение отрицательно: $x+2<0 \Rightarrow x<-2$. В этом случае обязательно **меняем знак** перед подмодульным выражением на противоположный. Получаем

$$(x+2)^2=-2(x+2)+3 \Rightarrow x^2+4x+4+2x+4-3=0 \Rightarrow x^2+6x+5=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=-5$$

Первый корень не подходит, так как для корней у нас должно выполняться условие $x<-2$.
Повторю еще раз. **В уравнениях такого типа мы всегда должны проверить корни по условию раскрытия модуля!!!**

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $|2x-1|x-3x-4=0$

Привыкайте к тому, что любое уравнение с модулем как минимум разделится на два. Пусть подмодульное выражение положительно. Тогда получим

$$2x-1\geq 0 \Rightarrow (2x-1)x-3x-4=0$$

Решаем простое квадратное уравнение и полученные корни обязательно проверяем по условии раскрытия модуля. Если подмодульное выражение отрицательно, то

$$2x-1<0 \Rightarrow -(2x-1)x-3x-4=0$$

И опять нас ждет квадратное уравнение и проверка корней по условию раскрытия модуля.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $2|x^2+2x-5|=x-1$.
Этому уравнению соответствуют два уравнения

$$2(x^2+2x-5)=x-1$$

и

$$2(x^2+2x-5)=-(x-1).$$

В этом уравнении мы можем сразу записать ОДЗ. Так как модуль равен некоторому выражению, то это выражение должно быть обязательно неотрицательно, так как значение модуля всегда неотрицательно. Следовательно, получаем ОДЗ: $x\geq 1$.
Решаем первое уравнение $2x^2+3x-9=0$ и находим его корни $x_1=1{,}5$ и $x_2=-3$, из которых по ОДЗ подходит только первый корень. Второе уравнение $2x^2+5x-11=0$ имеет корни $x_1=\dfrac{-5+\sqrt{113}}{4}$, $x_2=\dfrac{-5-\sqrt{113}}{4}$. Оцениваем значение каждого корня и получаем, что подходит только первый корень, так как второй заведомо отрицателен.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $|x^2-2x|=3-2x$

И опять используем ОДЗ при решении этого уравнения. Очевидно, что левая часть уравнения неотрицательна при любых *x*. Значит и правая часть должна быть неотрицательна

$$3-2x\geq 0$$

Теперь решим два уравнения и проверим их корни по ОДЗ. Если подмодульное положительно, то

$$x^2-2x=3-2x$$

Если подмодульное отрицательно, то

$$x^2-2x=-(3-2x)$$

Корни первого уравнения $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$. Первый корень не удовлетворяет ОДЗ, второй – удовлетворяет. Корни второго уравнения $x_1=3$, $x_2=1$. Первый корень удовлетворяет ОДЗ, второй – нет.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $|2x-3|=x-2$
Запишем ОДЗ: $x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$
Первое уравнение при положительном подмодульном будет иметь вид

$2x-3=x-2 \Rightarrow x_1=1$. Корень не подходит по ОДЗ

Второе уравнение будет иметь вид

$2x-3=-(x-2) \Rightarrow x_2=\dfrac{5}{3}$. Корень так же не подходит по ОДЗ

У уравнения нет решений.

Способ решения, который мы применяли при решении последних трех уравнений, подходит когда в одной части уравнения стоит выражение под модулем, а в другой части уравнения выражение с неизвестной величиной.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\dfrac{5x-3\cdot\left|x^2-4x+2\right|}{1-2x}=x+3$.

Подмодульное выражение неотрицательно

$$x^2-4x+2\ge 0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{5x-3\left(x^2-4x+2\right)}{1-2x}=x+3.$$

Решаем уравнение и проверяем соответствие корней неравенству. Помним, что $x\ne 0{,}5$ (ОДЗ).

$$5x-3x^2+12x-6=(x+3)(1-2x) \;\;\Rightarrow\;\; 17x-3x^2-6=x-2x^2+3-6x \;\;\Rightarrow\;\; x^2-22x+9=0,$$

$$x=\frac{22\pm\sqrt{448}}{2}=\frac{22\pm 8\sqrt{7}}{2}=\begin{matrix} x_1=11+4\sqrt{7} \\ x_2=11-4\sqrt{7} \end{matrix}$$

Проверим соответствие корней неравенству $x^2-4x+2\ge 0$. Для этого не надо решать неравенство. Мы просто подставим корни в неравенство. Главное определить, отрицательное или неотрицательное число получается. Учтём, что $x_1=11+4\sqrt{7}\approx 21{,}6$ и $x_2=11-4\sqrt{7}\approx 0{,}4$.

Очевидно, что x_1 удовлетворяет неравенству $x^2-4x+2\ge 0$, значит $x_1=11+4\sqrt{7}$ является корнем уравнения. Второй корень так же удовлетворяет неравенству $x^2-4x+2\ge 0$. Значит, $x_2=11-4\sqrt{7}$ также является корнем уравнения. Теперь второй случай. Подмодульное выражение отрицательно.

$$x^2-4x+2<0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{5x-3\left(-\left(x^2-4x+2\right)\right)}{1-2x}=x+3.$$

Решаем уравнение и проверяем корни на соответствие неравенству.

Тест 3.02.01. Решите уравнения

1. $2(x-1)^2+|x-1|-1=0$

2. $|2x+1|x-3x-4=0$

3. $x^2+2x+3\dfrac{|x-1|}{x-1}=0$

4. $x^2-\left|x-\dfrac{1}{4}\right|=0$

5. $\left|x^2-x-8\right|=-x$

6. $(x-3)^2=2|x|+3$.

7. $\dfrac{\left|x^2-11x+30\right|}{1-x}=x^2-12x+36$.

8. $\left|x^2-2x\right|=3-2x$

9. $|4x-5|=x-3$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**
$\frac{1}{2};\frac{3}{2}$	2	-3	$\frac{1}{2};\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$	$-2;-2\sqrt{2}$	$4\pm\sqrt{10}$	$6;\ 3-2\sqrt{2}$	$-\sqrt{3},\quad 1$	Нет корней

Тест 3.02.02. Решите уравнения

1. $(x+2)^2=2|x+2|+3$

2. $x|x|+8x-7=0$

3. $x^2-5x\dfrac{|x-2|}{x-2}-14=0$

4. $\dfrac{\left|x^2-x-2\right|}{x+1}=3$

5. $\dfrac{x^2+5x-6}{|x-2|}=2$

6. $(x-3)^2=2|x+2|+3$

7. $\left(3|x+1|+\dfrac{1}{3}\right)^2=6(x+1)^2+\dfrac{10}{9}$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**
(1;–5)	$-4+\sqrt{23}$	±7	5	$\frac{-7\pm\sqrt{89}}{2}$	$4\pm\sqrt{14}$	$-\frac{2}{3};-\frac{4}{3}$

3.03. Метод интервалов

Если уравнение содержит два и более **независимых** модуля (то есть не модуль в модуле, а два отдельных модуля), то такие уравнения надо решать методом интервалов. Разберем этот метод на примере.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $|x-2|+|x-4|=3$

Приравняем подмодульные выражения к нулю. Получим

$$\begin{cases} x-2=0 \;\Rightarrow\; x=2 \\ x-4=0 \;\Rightarrow\; x=4 \end{cases}$$

Что нам это дало? Мы нашли точку, в которых подмодульное выражение может изменить знак. В нашем случае выражение $x-2$ будет менять знак в точке 2, выражение $x-4$ меняет знак в точке 4.
Теперь рисуем таблицу. Количество строк в таблице равно количеству модулей, а количество столбцов равно количеству найденных значений x, при которых подмодульные выражения обращаются в 0.

<table>
<tr><td colspan="4">$-\infty$ 2   4 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x-2$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x-4$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Подмодульное выражение ($x-2$) будет положительно при $x \ge 2$ и отрицательно при $x < 2$ (проверьте это самостоятельно). Значит, ставим «минус» в первый столбец напротив этого модуля и «плюс» в два других. При расстановке знаков мы временно забываем про второе подмодульное и про его нулевую точку 4, то есть во время работы с одним из модулей про другой (или другие) мы временно не думаем (поэтому я не показываю в таблице данные другого подмодульного выражения; количество столбцов при этом мы не меняем). Именно поэтому данный метод называется методом **независимых** интервалов.

<table>
<tr><td colspan="4">$-\infty$ 2 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x-2$</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Таким образом мы показываем, что выражение ($x-2$) отрицательно от минус бесконечности до двух и положительно от двух до плюс бесконечности.
Подмодульное выражение ($x-4$) будет положительно при $x \ge 4$ и отрицательно при $x < 4$. Значит, ставим «минус» в первый и второй столбец напротив этого модуля и «плюс» в последний. Сейчас же мы временно забываем про первое подмодульное и про его нулевую точку 2.

<table>
<tr><td colspan="4">$-\infty$ 4 $+\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$x-4$</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td></tr>
</table>

Итоговая таблица будет выглядеть следующим образом.

<table>
<tr><td colspan="4">$-\infty$ 2   4 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x-2$</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$x-4$</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td></tr>
</table>

У нас получилось три интервала: 1. $x \in (-\infty; 2)$ 2. $[2; 4]$ 3. $x \in (4; \infty)$. Обратите внимание на скобки. Если вы включили числа 2 и 4 во второй интервал (квадратные скобки), то в два других интервала они не могут быть включены (только круглые скобки). В какой интервал включить число 2 (в первый или во второй) и число 4 (во второй или третий) решать только Вам. При этом ваше решение никак не повлияет на ответ. Решим уравнение для каждого интервала.

Если на рассматриваемом интервале подмодульное выражение отрицательно, то мы обязательно **меняем** знак перед модулем (не ставим минус, а именно меняем знак перед выражением на противоположный).

1. $x \in (-\infty; 2)$. Смотрим в таблицу. Согласно ей оба подмодульных выражения на этом интервале отрицательны. Следовательно, меняем знак перед каждым модулем. Получаем

$$-(x-2)-(x-4)=3 \;\Rightarrow\; x=1{,}5$$

Так как 1,5 принадлежит рассматриваему интервалу, то x = 1,5 является одним из корней уравнения.

2. $x \in [2;4]$. И опять смотрим в таблицу. На этом интервале первое подмодульное стало положительным, а второе все еще отрицательно. Следовательно, первый модуль мы просто снимаем и заменяем его скобками, а перед вторым подмодульным опять меняем знак. Получаем

$$(x-2)-(x-4)=3 \;\Rightarrow\; 2=3 \;\Rightarrow\; \varnothing$$

На этом интервале решений не будет, так как $2 \neq 3$.

3. $x \in (4;\infty)$.

На этом интервале оба подмодульных выражения положительны. Заменяем модули скобками. Получаем

$$x-2+x-4=3 \;\Rightarrow\; x=4{,}5$$

Так как 4,5 принадлежит данному интервалу, то x = 4,5 один из корней уравнения.
Итого получаем два корня: 1,5 и 4,5.

ВАЖНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ! Во-первых, если ответ уравнения изменится от того, в какой из промежутков вы включите число, ограничивающее промежуток, то это означает, что в решении есть ошибка. Во-вторых, если в таблице у вас получится два соседних столбика с одинаковыми знаками, то это означает, что вы неправильно расставили знаки.

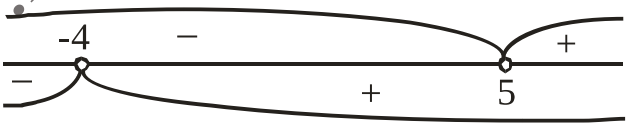
ПРИМЕР. *Решите уравнение* $|x-5|-|2x+8|=-12$.
В разных школах по–разному учат оформлять решение примеров из данной темы. Поэтому решение этого примера я оформлю по–другому. Я не навязываю Вам ни один из методов **оформления** решения. Выбирайте тот, который вам более удобен и понятен.
Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в ноль при $x=-4$ и $x=5$. Значит, нужно рассмотреть 3 интервала:

1) $x \le -4$; 2) $-4 < x \le 5$; 3) $x > 5$.

Получим три уравнения, в каждом из которых на неизвестное (переменную x) наложено ограничение. На рисунке схематично показано, какой знак будут иметь подмодульные выражения на каждом из трёх промежутков.

$x-5$

$2x+8$



1. $x \le -4$. $-(x-5)-(-(2x+8))=-12 \;\Rightarrow\; x=-25$ удовлетворяет ограничению $x \le -4$.

2. $-4 < x \le 5$. $-(x-5)-(2x+8)=-12 \Rightarrow x=3$ Этот корень так же удовлетворяет нашему интервалу.

3. $x > 5$. $(x-5)-(2x+8)=-12 \Rightarrow x=-1$ Этот корень не удовлетворяет интервалу.

Ответ: -25; 3.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $|x|+|x-6|=6$

Приравняем подмодульные выражения к нулю. Получим $x=0$ и $x-6=0 \Rightarrow x=6$

$-\infty$	0	6	$+\infty$
x	–	+	+
$x-6$	–	–	+

1. $x \in (-\infty;0) \;\Rightarrow\; -(x)-(x-6)=6 \;\Rightarrow\; x=0$

Так как 0 не принадлежит данному интервалу (скобки круглые), то он не является корнем уравнения. В случае получения граничного корня следует насторожиться. Вполне вероятно нас ждет сюрприз!

2. $x \in [0;6] \;\Rightarrow\; (x)-(x-6)=6 \;\Rightarrow\; 6=6$

Мы получили тождество. Это означает, что любое число, принадлежащее данному интервалу, будет являться корнем уравнения. Это и есть сюрприз. То есть 0 все же является корнем. Просто из-за того, что в первом интервале 0 не включен, мы получили его как корень во втором интервале, где 0 включен. Но и сейчас не стоит расслабляться. Если все числа из интервала [0;6] являются решениями, то в последнем интервале мы должны получить корень 6. Проверим.

3. $x \in (6;\infty) \;\Rightarrow\; x + x - 6 = 6 \;\Rightarrow\; x = 6$

Вот мы и получили опять граничный корень. Да, 6 не принадлежит данному интервалу (скобки круглые) и он формально не является корнем уравнения. Но это только для данного интервала. Самое главное, что число 6 попало в корни на предыдущем интервале.

Ответ: $x \in [0;6]$

Рассмотрим более сложный пример.

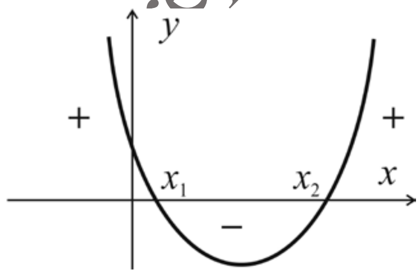
ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\left|x^2+4x+3\right|+\left|x^2+5x+6\right|=1$

Так как у нас подмодульное выражение представляет собой квадратный трехчлен – раскладываем его при помощи корней на множители:

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3) \quad \text{и} \quad x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

Перепишем уравнение с учетом преобразований

$$\left|(x+1)(x+3)\right|+\left|(x+2)(x+3)\right|=1$$



Для того, чтобы расставить знаки, надо вспомнить как выглядит на координатной плоскости парабола и как находятся точки пересечения параболы с осью ОХ (см. рисунок). Не помните? Тогда запомните следующий алгоритм. В точках, в которых квадратичный трехчлен обращается в ноль, обязательно происходит смена знака выражения. Нам надо найти знак подмодульного выражения на плюс бесконечности и потом просто пойти справа налево и менять знак только в нулевых точках подмодульного выражения. Попробуем на примере $x^2 + 4x + 3$. Если вместо x подставить бесконечно большое число, то значение выражения $x^2 + 4x + 3$ будет положительно. Следовательно, от плюс бесконечности до первой нулевой точки (точки минус 1) подмодульное выражение будет положительно. В точке минус 1 знак выражения изменится на противоположный, то есть отрицательный. Этот знак сохраниться до следующей нулевой точки – точки минус 3. После нее знак подмодульного опять измениться на противоположный и больше меняться не будет, так как больше нулевых точек у первого модуля нет. Аналогичным образом расставим знаки для второго модуля.

	$-\infty$	-3	-2	-1 $\quad +\infty$
$x^2 + 4x + 3$	+	–	–	+
$x^2 + 5x + 6$	+	–	+	+

Обращаю Ваше внимание на то, что знаки обоих выражений на промежутках (–∞;–3) и (–1; +∞) одинаковы. Поэтому эти два интервала можно при решении объединить.

Ну а дальше рассмотрим три интервала.

$$1.\,(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty) \qquad 2.\,[-3;-2] \qquad 3.\,(-2;-1]$$

При дальнейшем решении мы, как и раньше, смотрим в таблицу и меняем (или не меняем) знак перед модулем в зависимости от знака подмодульного выражения в таблице.

Если в уравнении присутствует два независимых модуля это не значит, что оно должно решаться только методом интервалов. Есть один тип уравнений с модулем, который решается проще. При решении уравнений типа $\left|f(x)\right|=\left|g(x)\right|$ можно возвести обе части во вторую степень, а потом разложить уравнение как разность квадратов

$$f^2(x)=g^2(x) \;\Rightarrow\; f^2(x)-g^2(x)=0 \;\Rightarrow\; \big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)=0$$

$$1.\; f(x)-g(x)=0 \Rightarrow f(x)=g(x) \qquad 2.\; f(x)+g(x)=0 \Rightarrow f(x)=-g(x)$$

Это один из самых простых вариантов уравнения с модулем. Его прелесть еще и в том, что **нет никакого ОДЗ и не надо проверять корни.** Все корни будут подходить. Мы этот можем применять только в том случае, когда у нас есть только два модуля и отсутствуют другие слагаемые. То есть по сути в уравнении должно быть равенство двух модулей.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\left|2x-5\right|=\left|3x^2-4x+1\right|$

Наша задача, исходя из вышеописанного метода, решить два уравнения

$$2x-5=3x^2-4x+1 \quad \text{и} \quad 2x-5=-\left(3x^2-4x+1\right)$$

Все! Мы получили два квадратных уравнения. ОДЗ тут не будет, все корни будут подходить.

Тест 3.03.01. Решите уравнения	
1. $\left|x+1\right|+\left|x-5\right|=20$ **2.** $\left|x+5\right|+\left|x-8\right|=13$ **3.** $\left|7x-12\right|-\left|7x-11\right|=1$ **4.** $\left|x\right|+\left|x-2\right|+2\left|x-5\right|=6$	**5.** $\left|x^2-4x+3\right|+\left|x^2-5x+6\right|=1$ **6.** $\left|x^2-9\right|+\left|x-2\right|=5$ **7.** $\left|3x^2-6x-1\right|=2\left|3-x\right|$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**
–8; 12	$-5\le x\le 8$	$x\le\dfrac{11}{7}$	Нет решений	$2;\dfrac{5}{2};\dfrac{9+\sqrt{17}}{4}$	$-3;2;\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}$	$\pm1;1\dfrac{2}{3};2\dfrac{1}{3}$	

Тест 3.03.02. Решите уравнения	
1. $\left|x\right|+\left|x-6\right|=6$ **2.** $\left|x+2\right|-\left|x-3\right|=5$ **3.** $\left|x-2\right|-3\left|3-x\right|+x=0$ **4.** $\left|x^2-9\right|+\left|x-3\right|=6$ **5.** $\left|x^2-5x+4\right|+\left|x^2-5x+6\right|=2$	**6.** $\left|x\right|-2\left|x+1\right|+3\left|x+2\right|=0$ **7.** $x\left|x\right|+2\left|x-2\right|=3$ **8.** $\left|x+3\right|=\left|2x^2+x-5\right|$ **9.** $\left|3x^2-3x+5\right|=\left|2x^2+6x-3\right|$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**
$0\le x\le 6$	$x\ge3$	$\left(\dfrac{11}{5};7\right)$	$\left(2;-3;\dfrac{1+\sqrt{73}}{2}\right)$	$\left(1\le x\le 2;3\le x\le 4\right)$	–2	$\left(-1-\sqrt{2};1\right)$	$\left(\pm2;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$	(1;8)

И опять итоговый тест. Тут в принципе гораздо проще чем в уравнениях или системах. Если модуль равен числу – применяем метод решения изложенный в первом параграфе. Модуль равен некоторому выражению с переменной или модуль находится внутри большого уравнения – применяем метод из второго параграфа. Несколько независимых модулей в одном уравнении – применяем метод интервалов из третьего параграфа. Самое главное при решении уравнений с модулем:

1. Всегда надо проверять корни. Очень часто вы будете получать посторонние корни.
2. Помнить, что из уравнения с модулем вы всегда должны получить как минимум два уравнения. А иногда и три и даже четыре.

Итоговый тест 1. Решите уравнения

1. $|x-2|x-6x+8=0$

2. $\left|x^2-3|x|+1\right|=1$

3. $|x-3|=-x^2+4x-3$

4. $|4x-3|=4x-3$

5. $|x|-|x-2|=2$

6. $|x|+|3x+2|+|2x-1|=5$

7. $|x-3|+2|x+1|=4$

8. $|x^2-3x+2|+|x^2-5x+6|=2$

9. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$

10. $3|2x^2+4x+1|=|x^2+5x+1|$

11. $|x^2-4x|=4$

12. $\dfrac{|x^2-13x+42|}{1-x}=x^2-14x+49$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
$-2\pm2\sqrt{3}$ $4+2\sqrt{2}$	$0;\pm1;$ $\pm2;\pm3$	$2;3$	$x\ge\frac{3}{4}$	$x\ge2$	$-1;\frac{2}{3}$	-1	$1;3$	$-\frac{2}{3};$ $\frac{1}{2};2$	$-1;-0,4;$ $\frac{-17\pm\sqrt{177}}{14}$	$2;$ $2\pm\sqrt{8}$	$7;$ $\frac{7-\sqrt{45}}{2}$

Итоговый тест 2. Решите уравнения

1. $x^2-2|x-1|=2$

2. $|2x+2|+|x-5|+1=0$

3. $|x+3|-|5-2x|=2-3x$

4. $|x-1|+|x-2|=|x-3|+4$

5. $|4-x|+|2x-2|=5-2x$

6. $|x^2-4|-|x^2-9|=5$

7. $\dfrac{6}{|x+1|-4}=|x+1|+1$

8. $|x+3|-|5-2x|=2-3x$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**
$-1-\sqrt{5};2$	Нет решений	$\frac{2}{3}$	±4	3	$x\le-3; x\ge3$	4; -6	$\frac{2}{3}$