Тема 5. Иррациональные уравнения

Содержание

5.01. Очень простые уравнения

Иррациональными называются уравнения, в которых неизвестная величина содержится под знаком корня. Иррациональные уравнения решаются не просто, а очень просто. Это один из самых простых видов уравнений, так как они всегда сводятся к квадратным уравнениям.

Главное в иррациональном уравнении это **проверить полученные корни уравнения**, так как почти всегда будут появляться посторонние корни. Если корни целые числа, то лучше проверить их подстановкой в само уравнение. Если нет, то необходимо проверить их по ОДЗ.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{1-2x}=0$

Для начала перенесем второе слагаемое в правую часть. Получим равенство корней

$$\sqrt{x^2+x-3}=\sqrt{1-2x}$$

Как избавиться от квадратного корня? Правильно!!! Надо возвести квадратный корень во вторую степень! **Только не забываем, что при решении уравнений подобные действия мы должны делать с обеими частями уравнения!!!** Возведя обе части уравнения во вторую степень перейдем к уравнению–следствию: $\left(\sqrt{x^2+x-3}\right)^2=\left(\sqrt{1-2x}\right)^2 \Rightarrow x^2+x-3=1-2x \Rightarrow x^2+3x-4=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-4$

Так как ответы целые числа, подставляем найденные значения в исходное уравнение. Корень 1 не подходит, так как при $x = 1$ оба подкоренных выражения будут отрицательны. Полученные корни не обязательно подставлять в оба подкоренных выражения. Достаточно, чтобы хотя бы одно подкоренное выражение было отрицательно. В нашем случае проще проверять корни по второму подкоренному выражению (считать меньше). Если оно будет отрицательно при подстановке одного из корней – смысла подставлять в первое подкоренное нет. Если положительно – на всякий случай проверяем и первое подкоренное. При подстановке второго корня оба подкоренных выражения положительны. Значит у нас только один корень. **Ответ.** $x = -4$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{8-5x}=\sqrt{x^2-16}$

Возведя обе части уравнения во вторую степень перейдем к уравнению–следствию: $8-5x=x^2-16 \Rightarrow x^2+5x-24=0 \Rightarrow x_1=-8,\ x_2=3$. И опять подставим корни в начальное уравнение. При $x = 3$ подкоренные выражения отрицательны. У нас опять всего один корень. **Ответ:** $x = -8$.

Если одна из частей уравнения заведомо положительна (например, в правой части уравнения положительное число), то корни можно не проверять, так как и вторая часть уравнения получится положительной.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{1+x+\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$

В левой части квадратный корень (он всегда положителен), а в правой части положительное число. Следовательно, ОДЗ у нас не будет и корни проверять не будем. Возведя обе части уравнения во вторую степень получим $1+x+\sqrt{2}=\sqrt{2}$. Получаем $x=-1$.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{\dfrac{9-5x}{3-8x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Возведя обе части уравнения во вторую степень получим $\dfrac{9-5x}{3-8x}=\dfrac{1}{2}$. Получаем простое линейное. Решая его находим $x = 7,5$.**Ответ:** $x = 7,5$.

ПРИМЕР. *Решить уравнение* $\sqrt{x^2-8}=-2$.

Левая часть уравнения неотрицательна, так как при извлечении квадратного корня или корня другой четной степени получают неотрицательное число. А вот в правой части уравнения отрицательное число. Следовательно, корней в этом уравнении нет.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $(x-5)(x+5)\sqrt{4x-8}=0$

Произведение нескольких множителей равно нулю, если хоть один из множителей равен нулю, а остальные множители при этом **будет иметь смысл**. Возможны три случая:

Случай 1. $x + 5 = 0$ или $x = -5$. Случай 2. $x - 5 = 0$ или $x = 5$. Случай 3. $4x - 8 = 0$ или $x = 2$

Учтем, что подкоренное выражение всегда должно быть неотрицательно: $4x-8\ge 0\Rightarrow x\ge 2$. Следовательно, корень –5 не подходит, так как хоть при нем произведение множителей равно нулю, подкоренное выражение становится отрицательным, то есть теряет свой смысл. **Ответ:** $x = 2; 5$.

Тест 5.01.02. Решите уравнения

1. $\sqrt{\dfrac{4-x}{x+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $\sqrt{x^2-8}=\sqrt{-2x}$.

3. $\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{x-1}$.

4. $\sqrt{6x^2+2x-10}=\sqrt{x^2-x-2}$

5. $\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{3x-2}=3\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}$

6. $\sqrt{\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{2x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

7. $(35-2x-x^2)\cdot\sqrt{3x-12}=0$

8. $\left(x^2-4\right)\sqrt{x+1}=0$

9. $\sqrt{6x^2+2x-14}=-1$

10. $\left(x^2+5x\right)\sqrt{x-3}=0$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
2,5	–4	2; 3	–8/5	2	4	4; 5	–1; 2	нет корней	3

5.02. Простые уравнения

Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ решаются возведением обеих частей во вторую степень $f(x)=g^2(x)$ и проверкой неотрицательности правой части $g(x)\ge 0$.

Главное проверить неотрицательность той части, которая не находиться под корнем, так как при возведении во вторую степень эта часть уравнения может поменять знак.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{2x^2+8x+1}-x=3$

Перенесем $-x$ в правую часть уравнения

$$\sqrt{2x^2+8x+1}=3+x;$$

При решении иррациональных уравнений с одним квадратным корнем наша задача получить в левой части уравнения только квадратный корень, перед которым будет стоять знак «+»! Поэтому все свободные слагаемые (в этом примере это «$-x$») мы переносим в правую часть!!!

В уравнениях такого типа мы должны записать ОДЗ. В данном уравнении ОДЗ будет иметь вид

$$x+3\geq 0 \quad \Rightarrow x\geq -3,$$

то есть, **так как значение квадратного корня всегда неотрицательно, то и то, чему он равен, должно быть неотрицательно**. Теперь возведем обе части уравнения во вторую степень

$$\left(\sqrt{2x^2+8x+1}\right)^2=(x+3)^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2+8x+1=9+6x+x^2$$

Главное не забыть «осчастливить» второй степенью правую часть уравнения. Это типичная ошибка при решении уравнений такого типа!!! Далее решаем уравнение как простое квадратное

$$x^2+2x-8=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-4; \quad x_2=2.$$

Первый корень не подходит по ОДЗ, так как согласно ОДЗ $x\geq -3$

Так как корни целые числа, то проверить корни так же можно просто подстановкой их в уравнение

При $x_1=-4$; $\sqrt{32-32+1}+4\neq 3 \Rightarrow x=-4$ – посторонний корень,

При $x_2=2$; $\sqrt{8+16+1}-2=3$ – верно $\Rightarrow$ $x=2$ – корень.

Оба способа проверки имеют право на жизнь. Однако в данном типе уравнений проверка по ОДЗ гораздо быстрей и удобней. **Ответ:** x=2.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$

Запишем ОДЗ: $x-2\geq 0$. Возведем во вторую степень обе части уравнения. Получим

$$4+2x-x^2=(x-2)^2$$

Решая это уравнение получим два корня $x_1=0, x_2=3$. Первый корень не подходит, так как он не удовлетворяет ОДЗ: $x-2\geq 0$. **Ответ:** $x=3$

Тест 5.02.02. Решите уравнения **1.** $\sqrt{2x^2-7x+5}=1-x$ **2.** $2\sqrt{x+5}=x+2$ **3.** $\sqrt{x+7}-x+3=0$	**4.** $x+\sqrt{2x^2-14x+13}=5$ **5.** $3x-\sqrt{18x+1}+1=0$ **6.** $9-\sqrt{81-7x^3}=\dfrac{x^3}{2}$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
1	4	$\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}$	–2	0; 4/3	0; 2

5.03. Как не потерять корень

При решении уравнений будьте аккуратны при сокращении переменной – Вы можете потерять корни!

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $(x-6)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-12$

Немного поколдуем над уравнением. Главное увидеть, что в правой части мы можем вынести 2 за скобки. Таким образом, получаем $(x-6)\sqrt{x^2-5x+4}=2(x-6)$. Если вы сократите на $(x-6)$, то вы можете потерять корень! Поэтому действуем иначе. Перенесем все слагаемые налево и вынесем $(x-6)$ за скобки. Получим

$$(x-6)\sqrt{x^2-5x+4}=2(x-6) \Rightarrow (x-6)\sqrt{x^2-5x+4}-2(x-6)=0 \Rightarrow (x-6)\left(\sqrt{x^2-5x+4}-2\right)=0$$

Произведение двух множителей равно нулю, если хоть одно из них равно нулю, а второе при этом будет иметь смысл. Проверим, не становится ли отрицательным подкоренное выражение при $x=6$. После подстановки видим, что при $x=6$ подкоренное выражение будет положительно (проверьте это самостоятельно подстановкой). Поэтому в данном примере если мы сокращаем на $(x-6)$, то мы потеряем корень!!! Поэтому получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=6 \\ \sqrt{x^2-5x+4}-2=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2-5x+4}=2 \end{array}\right.$$

Возведем обе части второго уравнения во вторую степень. Получим

$$\left(\sqrt{x^2-5x+4}\right)^2=2^2 \quad\Rightarrow\quad x^2-5x+4=4 \quad\Rightarrow\quad x^2-5x=0$$

Корни $x_1=0,\ x_2=5$ уже ходят в ОДЗ (можете проверить подстановкой).

Ответ: $x_1=0,\ x_2=5,\ x_3=6$.

www.repet.by

Тест 5.03.02. Решите уравнения

1. $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2$

2. $(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6$

3. $3(4x+3)\sqrt{16x+17}=(4x+3)(8x+5)$

4. $(x+4)\sqrt{2x-4}=(x+4)(x-1)$

1.	**2.**	**3.**	**4.**
–3; 2	–6; 7	–3/4; 2	Нет корней

5.04. Два корня в уравнении

Если в уравнении присутствует не один корень, а два, то очень важно перед возведением во вторую степень перегруппировать слагаемые так, чтобы перед каждым слагаемым стоял знак плюс, то есть все они были бы положительными. Если вы это не сделаете, то вы рискуете приобрести лишние корни.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5$

Так как все слагаемые в уравнении положительны, мы просто возводим обе части уравнения во вторую степень и приведем подобные. Получим

$$\left(\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}\right)^2=5^2 \quad\Rightarrow\quad 10-x^2+2\sqrt{10-x^2}\,\sqrt{x^2+3}+x^2+3=25$$

После этого перегруппировываем слагаемые так, чтобы в левой части осталось только произведение корней, а в правой части было все остальное. Получим

$$2\sqrt{10-x^2}\,\sqrt{x^2+3}=12 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{10-x^2}\,\sqrt{x^2+3}=6$$

Теперь еще раз возведем во вторую степень

$$\left(10-x^2\right)\left(x^2+3\right)=36 \quad\Rightarrow\quad 10x^2-x^4+30-3x^2=36 \quad\Rightarrow\quad x^4-7x^2+6=0$$

Получили биквадратное уравнение. Пусть $x^2=t$. Тогда

$$t^2-7t+6=0$$

Учтем, что $0\le t\le 10$ (ОДЗ записываем, смотря на подкоренные выражения исходного уравнения).

$$\begin{array}{ll} t=1 \qquad\qquad & t=6 \\ x^2=1 & x^2=6 \\ x=\pm1 & x=\pm\sqrt{6} \end{array}$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$

Тут чуть–чуть сложней. Перенесем в правую часть слагаемое $\sqrt{x+1}$, так как выражение $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}$ может быть меньше нуля, а возводить во вторую степень можно, если обе части уравнения неотрицательны. Переносим и возводим во вторую степень обе части

$$\left(\sqrt{3x+7}\right)^2=\left(\sqrt{x+1}+2\right)^2 \quad\Rightarrow\quad 3x+7=x+1+4\sqrt{x+1}+4$$

Перегруппировываем так, чтобы в одной части был квадратный корень, а в другой все остальное

$$2x+2=4\sqrt{x+1} \quad\Rightarrow\quad x+1=2\sqrt{x+1}$$

Мы получили уравнение, метод решения которого, подробно изучили в теме 5.02. Опять возводим во вторую степень

$$x^2+2x+1=4x+4 \quad\Rightarrow\quad x^2-2x-3=0$$

$$x=3 \qquad\qquad x=-1$$

Не забываем записать ОДЗ: $\begin{cases} 3x+7\ge 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases}$. Оба корня подходят по ОДЗ.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$

Не надо бояться большого количества корней. Возводим во вторую степень обе части. Получим

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}\right)^2=4^2$$

$$x+\sqrt{x+11}+2\sqrt{\left(x+\sqrt{x+11}\right)\left(x-\sqrt{x+11}\right)}+x-\sqrt{x+11}=16$$

$$2\sqrt{x^2-(x+11)}=16-2x$$

$$\sqrt{x^2-x-11}=8-x$$

Запишем ОДЗ: $8-x\ge 0 \Rightarrow x\le 8$. Опять возводим обе части уравнения в квадрат. Получаем

$$x^2-x-11=64-16x+x^2$$

Откуда $x=5$.

Обратите внимание, что во всех примерах после первого возведения во вторую степень мы переносим какие угодно слагаемые, но не квадратный корень (произведение квадратных корней), так как перед квадратным корнем (произведением корней) у нас всегда будет знак «+». Это происходит потому, что **перед возведением во вторую степень мы перегруппировывали слагаемые так, чтобы перед каждым слагаемым стоял знак плюс, то есть все они были бы положительными.**

Тест 5.04.02. Решите уравнения

1. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$

2. $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4$

3. $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7$

4. $\sqrt{x-13}=\sqrt{x+8}-3$

5. $\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{x-2}$

6. $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$

7. $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**
6	–4; 4	6	17	3	2; 34	1

5.05. Три корня в уравнении

Запомните!!! Не важно сколько корней присутствует в уравнении – один, два или три. Да какая разница сколько! Все равно будем «осчастливливать» правую и левую части уравнений второй степенью! При этом не забываем, что если в уравнении два или три корня, то мы обязательно перегруппировываем их так, чтобы каждое слагаемое было положительным!!!

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}$

Запишем ОДЗ (все подкоренные выражения должны быть положительны)

$$x\ge -\frac{5}{2},\ x\ge -\frac{6}{5},\ x\ge -\frac{25}{12} \quad\Rightarrow\quad x\ge -\frac{6}{5}$$ (оставляем самое строгое из трех ОДЗ)

Теперь возводим обе части уравнения во вторую степень. Получаем

$$\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}\right)^2=\left(\sqrt{12x+25}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad 2x+5+2\sqrt{2x+5}\sqrt{5x+6}+5x+6=12x+25$$

$$2\sqrt{2x+5}\sqrt{5x+6}=5x+14$$

Еще одно ОДЗ $5x+14\ge 0 \Rightarrow x\ge -\frac{14}{5}$. Это ОДЗ можем не учитывать, так как ОДЗ, которое мы получили ранее, более строгое. Еще раз возводим во вторую степень и приводим подобные

$$4(2x+5)(5x+6)=25x^2+140x+196 \quad\Rightarrow\quad 4\left(10x^2+25x+12x+30\right)=25x^2+140x+196$$

$$40x^2+100x+48x+120=25x^2+140x+196 \quad\Rightarrow\quad 15x^2+8x-76=0 \quad\Rightarrow\quad x=2,\ x\ne -\frac{38}{15}$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}$

Сразу сделаем простую замену $x^2=t\ge 0$ и возведем обе части уравнения в квадрат. Получим

$$\left(\sqrt{3t+1}+\sqrt{t+3}\right)^2=\left(\sqrt{6t+10}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad 3t+1+2\sqrt{3t+1}\sqrt{t+3}+t+3=6t+10$$

$$2\sqrt{3t+1}\sqrt{t+3}=2t+6 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{3t+1}\sqrt{t+3}=t+3$$

И опять по отработанной схеме еще раз возводим во вторую степень

$$(3t+1)(t+3)=t^2+6t+9 \quad\Rightarrow\quad 3t^2+t+9t+3=t^2+6t+9 \quad\Rightarrow\quad 2t^2+4t-6=0 \quad\Rightarrow\quad t^2+2t-3=0$$

$t\ne -3$ — Не подходит по ОДЗ; $t=1$, $x^2=1$, $x=\pm 1$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{9x-46}-\sqrt{2x-8}=\sqrt{x+6}$

А вот тут не спешим возводить во вторую степень. Для начала перенесем слагаемое $\sqrt{2x-8}$ в правую часть уравнения, чтобы оно (слагаемое) стало положительным. Получим

$$\sqrt{9x-46}-\sqrt{2x-8}=\sqrt{x+6} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{9x-46}=\sqrt{2x-8}+\sqrt{x+6}$$

А вот теперь мы имеем право возвести во вторую степень правую и левую части уравнения. Дальше действуем как в примерах выше.

Тест 5.05.02. Решите уравнение

1. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$ **.**

2. $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x-10}=0$

3. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{6-x}$

1.	**2.**	**3.**
7; 8	2	12/5; 4

5.06. Четыре корня в уравнении

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$

Вот тут немного сложней. Надо догадаться сгруппировать корни так, чтобы при возведении в квадрат сократились подобные слагаемые. Не получилось с первого раза – группируйте по-другому.

$$\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5} \quad\Rightarrow\quad \left(\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}\right)^2=\left(\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}\right)^2$$

$$8x+1-2\sqrt{8x+1}\sqrt{2x-2}+2x-2=7x+4-2\sqrt{7x+4}\sqrt{3x-5}+3x-5$$

$$\sqrt{8x+1}\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}\sqrt{3x-5}$$

ОДЗ $8x+1\ge 0,\ 3x-5\ge 0,\ 7x+4\ge 0,\ 2x-2\ge 0.$

Очень важно после получения корней уравнения подставить корни в исходное уравнение, так как могут появиться лишние корни, из–за того, что мы возводили в квадрат не сумму корней, а их разность!!!

Тест 5.06.02. Решить уравнение

1. $\sqrt{8-x}-\sqrt{9+5x}-\sqrt{4-5x}+\sqrt{5+x}=0$

2. $\sqrt{5x+1}-\sqrt{6x-2}-\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}=0$

1.	**2.**
–1/6; –1	$\frac{5}{4}$; 3

5.07. Замена переменных

Очень часто при решении иррациональных уравнений будет требоваться замена переменных. Вспоминайте как мы использовали замены при решении дробно–рациональных уравнений (первая глава). Тут мы будем применять тот же принцип.

Чем проще замена, тем меньше шансов сделать ошибку!!!

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$

Тут замена очевидна. Пусть $x^2+3x=t$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$t-18+4\sqrt{t-6}=0 \quad\Rightarrow\quad 4\sqrt{t-6}=18-t$$

Возводим правую и левую часть во вторую степень, находим значение t и делаем обратную замену

$$\left(4\sqrt{t-6}\right)^2=(18-t)^2$$

И не забываем про ОДЗ: $18-t\geq 0$!!!

В этом примере можно сделать и другую замену. Пусть $\sqrt{x^2+3x-6}=t,\ t\geq 0$. Тогда

$$x^2+3x-18=x^2+3x-6-12=\left(\sqrt{x^2+3x-6}\right)^2-12=t^2-12$$

и исходное уравнение становится таким

$$t^2-12+4t=0$$

Корни уравнения 2 и –6. Очевидно, что –6 не подходит, так как подкоренное выражение не может быть отрицательным. Тогда исходное уравнение равносильно такому

$$\sqrt{x^2+3x-6}=2\ \Rightarrow\ x^2+3x-6=4$$

Корни этого уравнения 2 и –5.

Конечный ответ не зависит от способа замены. Оба способа дадут одинаковый ответ. Однако если вы не уверены в своих силах, то используйте первый метод (он проще)!!!

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

На первый взгляд заменить тут нечего. Значит надо сделать какое–то простое действие и замена сразу же станет очевидной. В данном случае мы должны раскрыть скобки и привести подобные

$$x^2+4x+x+4-3\sqrt{x^2+5x+2}=6\ \Rightarrow\ x^2+5x+4-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$$

А вот и замена! Пусть $x^2+5x=t$. Тогда

$$t+4-3\sqrt{t+2}=6\ \Rightarrow\ t-2=3\sqrt{t+2}$$

Не забываем про ОДЗ: $t\geq 2$. Возводим обе части уравнения в квадрат

$$t^2-4t+4=9t+18\ \Rightarrow\ t^2-13t-14=0$$

$t=14$ $\qquad$ $t=-1$

$x^2+5x=14$ $\qquad$ Не подходит

$x^2+5x-14=0$ $\qquad$ по ОДЗ

$x=-7\quad x=2$

В некоторых уравнениях замена будет однозначна, то есть не будет никаких вариантов с заменой.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+4\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}}=4$

Тут тоже без вариантов. Пусть $\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=t>0$. Тогда $\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{t}$ и уравнение примет вид

$$t+\frac{4}{t}=4\ \Rightarrow\ t^2-4t+4=0\ \Rightarrow\ (t-2)^2=0\ \Rightarrow\ t=2$$

Вспоминаем про замену и про то, что степень ½ есть ни что иное как квадратный корень. Получаем

$$\sqrt{\frac{x+5}{x}}=2\Rightarrow\frac{x+5}{x}=4\Rightarrow x+5=4x\Rightarrow 3x=5\Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

Для решения следующих уравнений необходимо будет вспомнить несколько свойств степеней.

$a^m a^n=a^{m+n}$ или $a^m a^{-n}=a^{m-n}$ (например, $x^{10}x^9=x^{10+9}=x^{19}$ или $x^{10}x^{-9}=x^{10-9}=x^1=x$)

$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ или $\dfrac{a^m}{a^{-n}}=a^{m-(-n)}=a^{m+n}$ (например, $\dfrac{x^5}{x^3}=x^{5-3}=x^2$ или $\dfrac{x^7}{x^{-2}}=x^{7-(-2)}=x^{7+2}=x^9$)

$a^0=1$, $\quad a^1=a$, $\quad a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, $\quad a^{-1}=\dfrac{1}{a}$, $\quad \dfrac{1}{a^{-1}}=a$, $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, $\quad \sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}}$, $\quad (a^m)^n=a^{mn}$

Важно помнить, что если m или n четные числа, то при замене переменных $t = x^{\frac{m}{n}}$ замена t **будет всегда больше или равна нулю** $t \ge 0$.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{x^3+8} + \sqrt[4]{x^3+8} = 6$

Пусть $\sqrt[4]{x^3+8} = t \ge 0$. Тогда $\sqrt{x^3+8} = \left(x^3+8\right)^{\frac12} = \left(x^3+8\right)^{\frac24} = \left(\left(x^3+8\right)^{\frac14}\right)^2 = t^2$. Получим

$$t^2 + t - 6 = 0 \quad \Rightarrow t \ne -3 \qquad t = 2$$

Вспоминаем про замену

$$\sqrt[4]{x^3+8} = 2 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt[4]{x^3+8}\right)^4 = (2)^4 \;\Rightarrow\; x^3+8 = 16 \;\Rightarrow\; x^3 = 8 \;\Rightarrow\; x = 2$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{x\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56$

Сразу запишем ОДЗ: $x > 0$. Ну а теперь займемся окультуриванием степеней

$$\sqrt{x \cdot x^{\frac15}} - \sqrt[5]{x \cdot x^{\frac12}} = 56 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^{\frac65}} - \sqrt[5]{x^{\frac32}} = 56 \;\Rightarrow\; \left(x^{\frac65}\right)^{\frac12} - \left(x^{\frac32}\right)^{\frac15} = 56 \;\Rightarrow\; x^{\frac{6}{10}} - x^{\frac{3}{10}} - 56 = 0$$

Пусть $x^{\frac{3}{10}} = t > 0$. Тогда $x^{\frac{6}{10}} = x^{\frac{3\cdot2}{10}} = \left(x^{\frac{3}{10}}\right)^2 = t^2$. Получим $t^2 - t - 56 = 0 \;\Rightarrow\; t = 8$ и $t = -7$ (не подходит).

$$x^{\frac{3}{10}} = 8 \;\Rightarrow\; x^{\frac{3}{10}} = 2^3 \;\Rightarrow\; x^{\frac{1}{10}} = 2 \;\Rightarrow\; x = 2^{10} = 1024$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $x\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x^3} = 2$

И опять работаем со степенями

$$x^1x^{\frac15} - x^{\frac35} = 2 \;\Rightarrow\; x^{\frac65} - x^{\frac35} = 2 \;\Rightarrow\; x^{\frac{3\cdot2}{5}} - x^{\frac35} - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \left(x^{\frac35}\right)^2 - x^{\frac35} - 2 = 0$$

Пусть $x^{\frac35} = a$. Тогда уравнение примет вид $a^2 - a - 2 = 0$. Корни этого уравнения –1 и 2.

$$x_1^{\frac35} = 2 \Rightarrow x_1 = 2^{\frac53}; \qquad x_2^{\frac35} = -1 \Rightarrow x_2 = -1$$

Число $2^{\frac53}$ представим в человеческом виде

$$2^{\frac53} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = 2\sqrt[3]{4}.$$

Или можно по–другому

$$2^{\frac53} = 2^{\frac{3+2}{3}} = 2^{1+\frac23} = 2^1 \cdot 2^{\frac23} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0$

Преобразуем уравнение

$$x^1 \cdot x^{\frac13} - 4x^{\frac23} + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x^{\frac43} - 4x^{\frac23} + 4 = 0$$

Пусть $x^{\frac23} = a$. Тогда уравнение примет вид

$$a^2 - 4a + 4 = 0$$

Корень этого уравнения 2.

$$x^{\frac23} = 2 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

Обратите внимание на то, что мы получили два корня уравнения с противоположными знаками. Это возможно потому, что числитель в замене $x^{\frac23} = a$ четный.

Тест 5.07.02. Решите уравнения

1. $\sqrt{x+3}+\dfrac{4}{\sqrt{x+3}+3}=2$

2. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$

3. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$

4. $x\sqrt[4]{x}+2\sqrt[8]{x^5}=3$

5. $\dfrac{8}{\sqrt{10-2x}}-\sqrt{10-2x}=2$

6. $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$

7. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$

8. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$

9. $x^2+2\sqrt{41-x^2}=26$

10. $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$

11. $\sqrt{\dfrac{x+5}{x}}+4\sqrt{\dfrac{x}{x+5}}=4$

12. $\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{2(x+1)}{x}}=1$

13. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=\dfrac{5}{2}$

14. $x\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2+15}=2$

15. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$

16. $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}$

17. $\sqrt{x^2-3x+7}=3x+(x-3)^2-22$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.
–2	–27/8; 1	8; 27	1	3	8	1024	5; –5	4; –4	19; 84	5/3	–2	1/3	1	–4; 2	2	6; –3

Итоговый тест 2. Решите уравнения

1. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=3$

2. $\sqrt{\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x+1}}=\sqrt{\dfrac{3}{x+3}}$

3. $\sqrt{5x+1}=x-1$

4. $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$

5. $\sqrt{7-x^2}\sqrt{10-3x-x^2}=0$

6. $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$

7. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$

8. $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}$

9. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$

10. $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^3+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2=2$

11. $\dfrac{4}{5x+25}=\dfrac{1}{1-2\sqrt{x+5}}$

12. $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}-4\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=-3$

13. $\sqrt{25x^2+9}-\sqrt{25x^2-7}=2$

14. Чему равно произведение корней уравнения $x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-24}=36$?

15. Найти среднее арифметическое корней уравнения $5\sqrt[15]{x^{22}}-4\sqrt[15]{x^{14}\cdot\sqrt{x}}=12\sqrt[15]{x^7}$

16. Найти среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt[5]{x^{14}}+2x^2\cdot\sqrt[10]{x^3}=24x\sqrt[5]{x^4}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
1,25	–2	7	4	$-\sqrt{7}$; 2	–1; 15	–1; 2	4	–5; 2	0	–4,84	0	±0,8	–28	2	8