Тема 06. Показательные уравнения

Содержание

6.01. Очень простые показательные уравнения

Немного повторения.

$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot ......\cdot a}_{n}$ Число a – основание степени, n – показатель степени.

$(abc)^n = a^n b^n c^n$ или $a^n b^n c^n ... = (abc...)^n$. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ или $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$a^m a^n = a^{m+n}$ или $a^m a^{-n} = a^{m-n}$ (например, $x^{10}x^9 = x^{10+9} = x^{19}$ или $x^{10}x^{-9} = x^{10-9} = x^1 = x$)

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ или $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$ (например, $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$ или $\frac{x^7}{x^{-2}} = x^{7-(-2)} = x^{7+2} = x^9$)

$a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^{-1}} = a$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$, $(a^m)^n = a^{mn}$

Так же очень важно выучить степенные ряды чисел. Достаточно выучить ряды только до 1000.

Степень/число	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	9	16	25	36	49	64	81
3	8	27	64	125	216	343	512	729
4	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5	32	243	1024	3125				
6	64	729						
7	128	2187						
8	256							
9	512							
10	1024							

Если выучить не удается, тогда надо будет раскладывать число на множители. Например, представьте число 216 в виде числа в степени:

$$216 = 2\cdot 108 = 2\cdot 2\cdot 54 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 18 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 3 = 2^3\cdot 3^3 = (2\cdot 3)^3 = 6^3$$

Решение показательных уравнений основано на следующем свойстве степеней:

если $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0;\ a \neq 1)$, то $f(x) = g(x)$

При решении примеров на данную тему помните о следующих рекомендациях.

1. Превращайте десятичную дробь в обыкновенную.
2. Выравнивайте основания
3. Приравнивайте степени.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $0{,}4^{x-1}=6{,}25^{6x-5}$.

Так как $0{,}4=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ и $6{,}25=2{,}5^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$, то первоначальное уравнение примет вид

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}=\left(\frac{5}{2}\right)^{12x-10}\quad\Leftrightarrow\quad\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-12x+10}\quad\Leftrightarrow\ x-1=10-12x\ \Leftrightarrow\quad x=\frac{11}{13}.$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\dfrac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{(0{,}04)^x}{25}$

Так как $0{,}2=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}=5^{-1}$ и $0{,}04=\dfrac{4}{100}=\dfrac{1}{25}=\dfrac{1}{5^2}=5^{-2}$, то

$$\frac{5^{-(x+0{,}5)}}{5^{\frac{1}{2}}}=\frac{5^{-2x}}{5^2}\quad\Rightarrow\quad 5^{-x-0{,}5-0{,}5}=5^{-2x-2}\quad\Rightarrow\quad 5^{-x-1}=5^{-2x-2}\quad\Rightarrow\quad -x-1=-2x-2\quad\Rightarrow\quad x=-1.$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$.
Вынесем за скобку 3^x. Получим

$$2\cdot 3^1\cdot 3^x-6\cdot 3^{-1}\cdot 3^x-3^x=9\quad\Rightarrow\quad 3^x(2\cdot 3-2-1)=9\quad\Rightarrow\quad 3^x\cdot 3=9\quad\Rightarrow\quad 3^x=3\quad\Rightarrow\quad x=1$$

Можно было решить и немного по–другому. Вынесем за скобки 3^{x-1}

$$3^{x-1}(2\cdot 3^2-6-3^1)=9\quad\Rightarrow\quad 3^{x-1}(18-6-3)=9$$

$$3^{x-1}\cdot 9=9\quad\Rightarrow\quad 3^{x-1}=1\quad\Rightarrow\quad 3^{x-1}=3^0\quad\Rightarrow\quad x-1=0\quad\Rightarrow\quad x=1$$

Как видите, ответ не изменился. Выбирайте тот способ вынесения за скобки, который Вам больше понятен. Я рекомендую пользоваться первым способом.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot\left(10^{x-1}\right)^3$

Так как степень у двух оснований одинакова, то используя свойство $a^nb^nc^n\ldots=(abc\ldots)^n$ преобразуем левую часть уравнения: $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=(2\cdot 5)^{x^2-3}=10^{x^2-3}$. Используя свойство $(a^m)^n=a^{mn}$ преобразуем последний множитель $\left(10^{x-1}\right)^3=10^{3(x-1)}=10^{3x-3}$. После данных преобразований получаем

$$10^{x^2-3}=10^{-2}\cdot 10^{3x-3}\quad\Rightarrow\quad 10^{x^2-3}=10^{-2+3x-3}\quad\Rightarrow\quad 10^{x^2-3}=10^{3x-5}\quad\Rightarrow\quad x^2-3=3x-5$$

Получившееся квадратное уравнение решить не составит труда. Ответ $x_1=1,\quad x_2=2$.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\left(5^{x^2+x-2}\right)^{3-x}=1$

Воспользуемся свойствами $(a^m)^n=a^{mn}$ и $a^0=1$. Получим $\left(5^{x^2+x-2}\right)^{3-x}=5^{\left(x^2+x-2\right)(3-x)}$ и $1=5^0$. После данных преобразований получаем

$$5^{\left(x^2+x-2\right)(3-x)}=5^0\Rightarrow\left(x^2+x-2\right)(3-x)=0$$

Дальнейшее решение не представляет интереса.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\left(\dfrac{1}{0{,}125}\right)^x=128$

$$\textbf{1.}\quad\frac{1}{0{,}125}=\frac{1}{\frac{125}{1000}}=\frac{1000}{125}=8\qquad\textbf{2.}\quad 8=2^3\qquad\textbf{3.}\quad 128=2^7$$

После данных преобразований получаем: $\left(2^3\right)^x=2^7\quad\Rightarrow\quad 2^{3x}=2^7\quad\Rightarrow\quad 3x=7\quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{7}{3}$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $2^{x-1}=2\sqrt{2}$

$$2\sqrt{2}=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$$ или другим способом $$2\sqrt{2}=2^1 2^{\frac{1}{2}}=2^{1+\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$$

После данных преобразований получаем

$$2^{x-1}=2^{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; x-1=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; x=2,5$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $4^x\cdot 5^{x-1}=0,2\cdot 20^{3-2x}$.

Сколько будет 4 умножить на 5? Будет 20. Значит нам надо попытаться в левой части уравнения получить основание степени 20. Пробуем

$$4^x\cdot 5^{x-1}=0,2\cdot 20^{3-2x} \;\Rightarrow\; 4^x\cdot\frac{5^x}{5}=\frac{2}{10}\cdot 20^{3-2x} \;\Rightarrow\; 4^x\cdot 5^x\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\cdot 20^{3-2x} \;\Rightarrow\; (4\cdot 5)^x=20^{3-2x} \;\Rightarrow\; 20^x=20^{3-2x}.$$

Дальше как в примерах выше.

Тест 6.01.02. Решите уравнения	
1. $\left(\frac{19}{7}\right)^{19x^2-3}=\left(\frac{7}{19}\right)^{3x^2-19}$	**5.** $\frac{1}{27}\cdot\sqrt[4]{9^{3x-1}}=27^{-\frac{2}{3}}$
2. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}=\left(\frac{25}{9}\right)^{-3}$	**6.** $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}\left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11}=\left(\frac{5}{3}\right)^{9}$
3. $\sqrt{10^{2x+6}}=\frac{10}{\sqrt[4]{10}}$	**7.** $4^x\cdot 5^{x-1}=0,2\cdot 20^{3-2x}$
4. $0,5^{x^2-9x+17,5}=\frac{8}{\sqrt{2}}$	**8.** $2^{\lvert x+1\rvert}=\left(\sqrt{2}\right)^{-2x+3}$
	9. $5^{\lvert 2-4x\rvert}=5^{\lvert 4-6x\rvert}$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**
–1;1	3	–2,25	4;5	1	–7/2; 2	1	0,25	0,6; 1

6.02. Простые показательные уравнения

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $5^{2x+1}-3\cdot 5^{2x-1}=550$.

Чем проще решение, тем меньше вероятность сделать ошибку. Немного преобразуем уравнение

$$5^{2x+1}-3\cdot 5^{2x-1}=550 \;\Rightarrow\; 5^{2x}\cdot 5^1-3\cdot\frac{5^{2x}}{5^1}=550$$

А теперь вынесем за скобки 5^{2x}. Получим

$$5^{2x}\left(5-\frac{3}{5}\right)=550 \;\Rightarrow\; 5^{2x}\cdot\frac{22}{5}=550 \;\Rightarrow\; 5^{2x}\cdot\frac{11\cdot 2}{5}=11\cdot 5\cdot 10 \;\Rightarrow\; 5^{2x}=125 \;\Rightarrow\; 5^{2x}=5^3$$

Мы получили уравнение, аналогичное тем, которые решали в предыдущем параграфе.

Это уравнение можно решить и иначе. Вынесем в левой части уравнения 5^{2x-1} за скобки. Получим

$$5^{2x-1}\left(5^2-3\right)=550 \;\Leftrightarrow\; 5^{2x-1}=5^2 \;\Leftrightarrow\; 2x-1=2 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{3}{2}$$

Мы получили точно такой же ответ. На мой взгляд первый способ более простой.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $2^{12x-1}-4^{6x-1}+8^{4x-1}-16^{3x-1}=1280$

Так как $4=2^2$, $8=2^3$, $16=2^4$, то наше уравнение можно переписать в виде

$$2^{12x-1}-2^{2(6x-1)}+2^{3(4x-1)}-2^{4(3x-1)}=1280 \;\Rightarrow\; 2^{12x-1}-2^{12x-2}+2^{12x-3}-2^{12x-4}=1280$$

Вынесем за скобки 2^{12x} (а можем вынести 2^{12x-4}, ответ от этого не поменяется). Получим

$$2^{12x}\left(2^{-1}-2^{-2}+2^{-3}-2^{-4}\right)=1280 \;\Rightarrow\; 2^{12x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)=1280$$

Если вы сомневаетесь в том, правильно ли вы вынесли за скобки множитель, то просто откройте скобки и убедитесь в том, что выражение будет совпадать с оригинальным. Так же важно понимать, что в результате преобразований внутри скобки получится число, которое очень удачно сократится с числом, стоящим в правой части уравнения. В результате этого сокращения мы должны будем получить число, которое сможем представить как 2^a (основание степени равно 2, так как мы выносили за скобки $\mathbf{2}^{12x}$). Если не получается такое число, то вы что–то сделали не так.
После приведения к общему знаменателю и вычислений получаем

$$2^{12x}\cdot\frac{5}{16}=256\cdot5 \;\Rightarrow\; 2^{12x}=256\cdot16 \;\Rightarrow\; 2^{12x}=16\cdot16\cdot16 \;\Rightarrow\; 2^{12x}=2^4\cdot2^4\cdot2^4 \;\Rightarrow\; 2^{12x}=2^{12}$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $2^x-2^{x-4}=15$

Так как $2^{x-4}=2^x2^{-4}=\dfrac{2^x}{2^4}=\dfrac{2^x}{16}$, то

$$2^x-\frac{2^x}{16}=15 \;\Rightarrow\; 2^x\left(1-\frac{1}{16}\right)=15 \;\Rightarrow\; 2^x\cdot\frac{15}{16}=15 \;\Rightarrow\; 2^x=16 \;\Rightarrow\; 2^x=2^4 \;\Rightarrow\; x=4$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $2^{1-x}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}-\dfrac{1}{2^{x+4}}-\dfrac{1}{\sqrt{4^{x+5}}}=130$

Так как $2^{1-x}=2^1\cdot2^{-x}=\dfrac{2}{2^x}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}=\dfrac{1}{2^x2^3}$, $\dfrac{1}{2^{x+4}}=\dfrac{1}{2^x2^4}$, $\dfrac{1}{\sqrt{4^{x+5}}}=\dfrac{1}{2^{x+5}}=\dfrac{1}{2^x2^5}$, то

$$\frac{2}{2^x}+\frac{1}{2^x2^3}-\frac{1}{2^x2^4}-\frac{1}{2^x2^5}=130 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2^x}\left(2+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)=130 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2^x}=64 \;\Rightarrow\; 2^{-x}=2^6 \;\Rightarrow\; x=-6$$

www.repet.by

Тест 6.02.02. Решите уравнения **1.** $5^{x+2}-12\cdot5^{x-1}=565$ **2.** $2^{x^2+x-6}-2^{x^2+x-9}=56$ **3.** $2\cdot16^x-2^{4x}-4^{2x-2}=15$ **4.** $\sqrt{3^{x-54}}-7\sqrt{3^{x-58}}=162$	**5.** $2^{\sqrt{x}+2}-2^{\sqrt{x}+1}=12+2^{\sqrt{x}-1}$ **6.** $2^{12x-1}-4^{6x-1}+8^{4x-1}-16^{3x-1}=1280$

1.	2.	3.	4.	5.	6.
2	–4;3	1	66	9	1

6.03. Разные основания и одинаковые степени

Если два разных числа, возведенных в одинаковую степень, равны друг другу, то степень, в которую возводили числа, равна нулю!

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $2\cdot3^{x-1}-3^{x-2}=5^{x-2}+4\cdot5^{x-3}$

В левой части уравнения вынесем за скобки 3^x, в правой 5^x. Получим

$$2\cdot\frac{3^x}{3}-\frac{3^x}{3^2}=\frac{5^x}{5^2}+4\cdot\frac{5^x}{5^3} \;\Rightarrow\; 3^x\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3^2}\right)=5^x\left(\frac{1}{5^2}+\frac{4}{5^3}\right) \;\Rightarrow\; 3^x\left(\frac{6-1}{3^2}\right)=5^x\left(\frac{5+4}{5^3}\right) \;\Rightarrow\; 3^x\frac{5}{3^2}=5^x\frac{9}{5^3}$$

Тройки дружат с тройками, а пятерки с пятерками (переносим по свойствам пропорции)

$$3^x\frac{5}{3^2}=5^x\frac{9}{5^3} \;\Rightarrow\; \frac{3^x}{3^2\cdot9}=\frac{5^x}{5\cdot5^3} \;\Rightarrow\; \frac{3^x}{3^2\cdot3^2}=\frac{5^x}{5\cdot5^3} \;\Rightarrow\; \frac{3^x}{3^4}=\frac{5^x}{5^4} \;\Rightarrow\; 3^{x-4}=5^{x-4}$$

Последнее равенство возможно только в том случае, когда степень будет равна нулю. Следовательно
$x-4=0$, то есть $x=4$

Этот пример можно было решить немного иначе. В левой части уравнения вынесем за скобки 3^{x-2}, в правой – 5^{x-3}. Получим

$$3^{x-2}\left(2\cdot3^1-1\right)=5^{x-3}\left(5^1+4\right) \;\Rightarrow\; 3^{x-2}\cdot5=5^{x-3}\cdot9 \;\Rightarrow\; \frac{3^{x-2}}{3^2}=\frac{5^{x-3}}{5^1} \;\Rightarrow\; 3^{x-2}\cdot3^{-2}=5^{x-3}\cdot5^{-1} \;\Rightarrow\; 3^{x-4}=5^{x-4}$$

В результате точно такой же ответ. Какой способ решения удобней решать вам.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $7^{x-1}-6^{2-2x}=0$

Используем основные свойства степеней

$$7^{x-1}-6^{2-2x}=0 \quad\Rightarrow\quad 7^{x-1}=6^{2(1-x)} \quad\Rightarrow\quad 7^{x-1}=36^{1-x} \quad\Rightarrow\quad 7^{x-1}=\left(\frac{1}{36}\right)^{-(1-x)} \quad\Rightarrow$$

$$7^{x-1}=\left(\frac{1}{36}\right)^{x-1} \quad\Rightarrow\quad x-1=0 \Rightarrow x=1$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{17^{x-1}}=102\cdot 6^{x-4}$

Так как 102 невозможно представить как целое число в степени, то надо увидеть, что это произведение 6 и 17. Получим

$$\sqrt{17^{x-1}}=17\cdot 6\cdot 6^{x-4} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{17^{x-1}}}{17}=6^1\cdot 6^{x-4} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{17^{x-1}}}{\sqrt{17^2}}=6^{x-4+1} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{17^{x-1}}{17^2}}=6^{x-3}$$

$$\sqrt{17^{x-1-2}}=6^{x-3} \quad\Rightarrow\quad \left(\sqrt{17}\right)^{x-3}=6^{x-3} \quad\Rightarrow\quad x-3=0 \Rightarrow x=3$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $2^{3x+10}-3^{3x+9}+3^{3x+7}+2^{3x+9}=0$

Перегруппируем (двойки к двойкам, тройки к тройкам) и используем основные свойства степеней

$$2^{3x+10}+2^{3x+9}=3^{3x+9}-3^{3x+7} \quad\Rightarrow\quad 2^{3x}\cdot 2^{10}+2^{3x}\cdot 2^9=3^{3x}\cdot 3^9-3^{3x}\cdot 3^7 \quad\Rightarrow\quad 2^{3x}\left(2^{10}+2^9\right)=3^{3x}\left(3^9-3^7\right)$$

$$2^{3x}\cdot 2^9\left(2+1\right)=3^{3x}\cdot 3^7\left(3^2-1\right) \quad\Rightarrow\quad 2^{3x}\cdot 2^9\cdot 3=3^{3x}\cdot 3^7\cdot 8 \quad\Rightarrow\quad \frac{2^{3x}\cdot 2^9}{2^3}=\frac{3^{3x}\cdot 3^7}{3^1}$$

$$2^{3x}\cdot 2^{9-3}=3^{3x}\cdot 3^{7-1} \quad\Rightarrow\quad 2^{3x+6}=3^{3x+6} \quad\Rightarrow\quad 3x+6=0 \Rightarrow x=-2$$

Тест 6.03.02. Решите уравнения

1. $2{,}5\cdot 4^x=8\cdot 5^{x-1}$

2. $3\cdot 7^x\cdot 5^{1-x}=7\cdot 3^x$

3. $3^x-2\cdot 3^{x-2}-7^{x-2}-2\cdot 7^{x-3}=0$

4. $8\cdot 7^{x^2-5x+7}-7\cdot 8^{x^2-5x+7}=0$

5. $4^x-3^{x-0{,}5}=3^{x+0{,}5}-2^{2x-1}$

6. $x\cdot 3^{x-1}+3\cdot 3^{\sqrt{3-x}}=3^x+x\cdot 3^{\sqrt{3-x}}$

7. $5^{x^2}+7^{x^2-1}=7^{x^2}-17\cdot 5^{x^2-2}$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**
2	1	4	2;3	1,5	2;3	$\pm\sqrt{2}$

6.04. Замена переменных

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $4^{x^2+2}-9\cdot 2^{x^2+2}+8=0$.

Сделаем небольшое преобразование: $2^{2(x^2+2)}-9\cdot 2^{x^2+2}+8=0$. Коэффициенты при x^2 в показателях степени числа 2 не равны: $2^{2(x^2+2)}$ и 2^{x^2+2}. Поэтому введем вспомогательную переменную

$$2^{x^2+2}=t \quad\Rightarrow\quad 2^{2(x^2+2)}=t^2 \quad\Rightarrow\quad t^2-9t+8=0 \quad\Rightarrow\quad t_1=1;\ t_2=8.$$

Делаем обратную замену

$$2^{x^2+2}=1 \quad\Rightarrow\quad 2^{x^2+2}=2^0 \quad\Rightarrow\quad x^2+2=0 \text{ – такое уравнение не имеет решений.}$$

$$2^{x^2+2}=8 \quad\Rightarrow\quad 2^{x^2+2}=2^3 \quad\Rightarrow\quad x^2+2=3 \quad\Rightarrow\quad x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1.$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $8^x-4^{x+0{,}5}-2^x+2=0$

Немного преобразуем используя свойства степеней

$$2^{3x}-2^{2(x+0{,}5)}-2^x+2=0 \quad\Rightarrow\quad 2^{3x}-2^{2x+1}-2^x+2=0 \quad\Rightarrow\quad 2^{3x}-2\cdot 2^{2x}-2^x+2=0$$

Пусть $2^x=t$, тогда $2^{2x}=t^2$, $2^{3x}=t^3$. С учетом замены получаем

$$t^3-2t^2-t+2=0$$

Что делать, если видите четыре слагаемых и неизвестную в третьей степени? Группировать!

$$t^2(t-2)-(t-2)=0 \;\Rightarrow\; (t-2)(t^2-1)=0 \;\Rightarrow\; (t-2)(t-1)(t+1)=0 \;\Rightarrow\; t_1=1,\;\; t_2=-1,\;\; t_3=2$$

Отрицательный корень выкидываем. Окончательно получаем $2^x=2$ и $2^x=1$, откуда $x_1=1,\;\; x_2=0$.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\sqrt{5^x-1}=7-5^x$

У нас ни что иное, как иррациональное уравнение. Поэтому при решении важно не забыть записать ОДЗ: $7-5^x\ge 0$, то есть $5^x\le 7$. Возведем обе части уравнения в квадрат

$$5^x-1=(7-5^x)^2$$

Пусть $5^x=t$. Получаем

$$t-1=(7-t)^2 \;\Rightarrow\; t^2-15t+50=0 \;\Rightarrow\; t_1=10,\;\; t_2=5.$$

Очевидно, что первый корень не подходит по ОДЗ. Окончательно получаем

$$5^x=5 \;\Rightarrow\; x=1$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $4^x-7\cdot 2^{\frac{x-3}{2}}=2^{-x}$

Это пример с очень неудобными степенями. Немного преобразуем используя свойства степеней

$$2^{2x}-7\cdot 2^{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2^x} \;\Rightarrow\; 2^{2x}-\frac{7\cdot 2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2^x}$$

Пусть $2^{\frac{x}{2}}=t$. Тогда получаем

$$t^4-\frac{7}{2^{\frac{3}{2}}}t-\frac{1}{t^2}=0 \;\Rightarrow\; t^6-\frac{7}{2^{\frac{3}{2}}}t^3-1=0$$

Делаем еще одну замену. Пусть $t^3=a$. Получаем

$$a^2-\frac{7}{2^{\frac{3}{2}}}a-1=0$$

У нас немного некрасивый коэффициент *b*. Не надо его бояться. Аккуратненько считаем дискриминант. Получаем

$$D=\frac{49}{8}+4=\frac{81}{8}=\left(\frac{9}{2^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \;\Rightarrow\; a=\frac{\frac{7}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{9}{2^{\frac{3}{2}}}}{2}=\frac{16}{2^{\frac{5}{2}}}=\frac{2^4}{2^{\frac{5}{2}}}=2^{4-\frac{5}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$$

Отрицательный корень нам как всегда не подойдет, поэтому мы его и не ищем. Получаем

$$t^3=2^{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; t=2^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; 2^{\frac{x}{2}}=2^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; x=1$$

Тест 6.04.02. Решите уравнения

1. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$

2. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$

3. $64^{\frac{1}{x}}+2^{2+\frac{3}{x}}-12=0$

4. $27^{2\sqrt{x}}=4\cdot 3^{\sqrt{9x}}-3$

5. $4^{x-\sqrt{x^2-5}}-12\cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}}+8=0$

6. $\frac{4}{2^x+2}-\frac{1}{2^x-3}=2$

7. $2^{2+x}-2^{2-x}=15$

8. $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99$

9. $3^{x+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}-\sqrt{9^{x-2}}-\frac{1}{\sqrt{9^{3-x}}}=258$

10. $4\sqrt{4^{\frac{3}{x}-1}-1}=12-4^{\frac{3}{x}}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2	$\pm1;\pm\sqrt{2}$	3	1/9;0	9/4;3	1;–1	2	1;–1	4	2

6.05. Однородные уравнения

Вспоминайте тему «1.07. Однородные уравнения и не только»!!!

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $6\cdot 3^{2x}-13\cdot 6^{x}+6\cdot 2^{2x}=0$

Так как $6^{x}=3^{x}\cdot 2^{x}$, то

$$6\cdot 3^{2x}-13\cdot 3^{x}\cdot 2^{x}+6\cdot 2^{2x}=0.$$

Разделим обе части уравнения на 2^{2x} и получим

$$6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+6=0.$$

Введем новую переменную $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$ и придем к квадратному уравнению

$$6t^{2}-13t+6=0,$$

решая которое, получим $t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=\frac{2}{3}$. Таким образом, решение первоначального уравнения сводится к решению совокупности двух показательных уравнений:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{3}{2};\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{2}{3},$$

решая которые получим: $x_1=1,\quad x_2=-1$.

Если вы неуверенно работаете со степенями, то можете сделать промежуточную замену. Пусть $2^{x}=a,\ 3^{x}=b.$ тогда уравнение примет вид

$$6b^{2}-13ab+6a^{2}=0$$

Теперь разделим каждое слагаемое на a^2. Получим

$$\frac{6b^{2}}{a^{2}}-\frac{13ab}{a^{2}}+\frac{6a^{2}}{a^{2}}=0\ \Rightarrow\ 6\left(\frac{b}{a}\right)^{2}-13\frac{b}{a}+6=0\ \Rightarrow\ 6t^{2}-13t+6=0$$

Ответ: $x_1=1,\quad x_2=-1$.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $9\cdot 5^{\frac{2}{\sqrt{x}}}+2\cdot 15^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-75\cdot 3^{\frac{2}{\sqrt{x}}}=0$

Немного преобразовываем

$$9\cdot 5^{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot 2}+2\cdot(3\cdot 5)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-75\cdot 3^{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot 2}=0\ \Rightarrow\ 9\cdot\left(5^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)^{2}+2\cdot 5^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot 3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-75\cdot\left(3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)^{2}=0$$

Разделим уравнение на $3^{\frac{2}{\sqrt{x}}}$. Получим

$$9\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}}}+2\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-75=0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=t$. Тогда получаем $9t^{2}+2t-75=0$. Дальше как в первом примере.

Тест 6.05.02. Решите уравнения

1. $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}=5\cdot 6^{x}$

2. $2\cdot 7^{x}-3\cdot 2^{x}=6\frac{1}{7}\cdot 14^{0,5x}$

3. $5\cdot 3^{2x}+15\cdot 5^{2x-1}=8\cdot 15^{x}$

4. $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=2\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$

5. $6\sqrt[x]{9}+6\sqrt[x]{4}-13\sqrt[x]{6}=0$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
0;1	2	0;1	Нет решений	Нет решений

6.06. Системы уравнений

ПРИМЕР. *Решите систему уравнений* $\begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972 \\ y - x = 3 \end{cases}$

Самое очевидное решение, это выразить переменную из второго уравнения и подставить в первое. Так и сделаем

$$y = x + 3 \;\Rightarrow\; 3^{x+3} \cdot 2^x = 972 \;\Rightarrow\; 3^x \cdot 3^3 \cdot 2^x = 972 \;\Rightarrow\; 3^x \cdot 2^x = \frac{972}{27} \;\Rightarrow\; 6^x = 36 \;\Rightarrow\; x = 2 \;\Rightarrow\; y = 5$$

ПРИМЕР. *Решите систему уравнений* $\begin{cases} 3^x \cdot 25^y = 5625 \\ 5^x \cdot 9^y = 2025 \end{cases}$

Немного преобразуем $\begin{cases} 3^x \cdot 5^{2y} = 5625 \\ 5^x \cdot 3^{2y} = 2025 \end{cases}$. Разделим первое уравнение на второе

$$\frac{3^x \cdot 5^{2y}}{5^x \cdot 3^{2y}} = \frac{5625}{2025} \;\Rightarrow\; \frac{5^{2y-x}}{3^{2y-x}} = \frac{25}{9} \;\Rightarrow\; \left(\frac{5}{3}\right)^{2y-x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Откуда $2y - x = 2 \;\Rightarrow\; 2y = x + 2$. Подставим $2y$ во второе уравнение системы

$$5^x \cdot 3^{2y} = 2025 \;\Rightarrow\; 5^x \cdot 3^{x+2} = 2025 \;\Rightarrow\; 5^x \cdot 3^x \cdot 3^2 = 2025 \;\Rightarrow\; 15^x = \frac{2025}{9} \;\Rightarrow\; 15^x = 225 \;\Rightarrow\; 15^x = 15^2$$

При решении систем не забывайте, что вы всегда можете сделать замену.

ПРИМЕР. *Решите систему уравнений* $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 2,75 \\ 2^x - 3^y = -0,75 \end{cases}$

Сделаем замену $2^x = a,\; 3^y = b.$ Наша система примет вид $\begin{cases} 3a + 2b = 2,75 \\ a - b = -0,75 \end{cases}$. Такая система легко решиться методом подстановки.

Тест 6.06.02. Решите системы уравнений

1. $\begin{cases} 2^y \cdot 8^{-x} = 8\sqrt{2} \\ y + 3x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2^{x+1} = y^2 + 4 \\ 2^{x-1} = y \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725 \\ 3^x - 2^{0,5y} = 25 \end{cases}$.

1.	**2.**	**3.**
(–0,5; 2)	(2;2)	(3;2)

Итоговый тест 2. Решите уравнения

1. $\left(\dfrac{1}{0,125}\right)^x = 128$

2. $16\sqrt[5]{8^{x^2-3x-5}} = 128$

3. $3^x \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\dfrac{1}{27}\right)^x$

4. $16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$

5. $2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot \left(10^{x-1}\right)^5$

6. $2^{|3x-5|} = 4 \cdot 8^{|x-1|}$

7. $3^{x+2} - 3^x = 72$

8. $2^x - 2^{x-4} = 15$

9. $5^{2x-1} + 4^x = 5^{2x} - 4^{x+1}$

10. $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = \dfrac{4}{9} \\ x + y = 4 \end{cases}$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
$\frac{7}{3}$	5; –2	–1	24	$\frac{3}{2}$	(–∞;1]	2	4	1	(2;2)