Тема 07. Логарифмы

Содержание

7.01. Логарифм. Определение. Простейшие уравнения

Логарифмом числа b по основанию a ($b > 0$, a>0, $a \neq 1$– эти условия должны **всегда** выполняться) называется показатель степени, в который нужно возвести число a, чтобы получить число b:

$$a^{\log_a b} = b$$

Это равенство, выражающее определение логарифма, называется **основным логарифмическим тождеством**. Равенство $\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$.

ПРИМЕРЫ.

$\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$ $\qquad$ $\log_2 16 = 4$, так как $2^4 = 16$

$\log_3 81 = 4$, так как $3^4 = 81$ $\qquad$ $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

$\log_{15} 1 = 0$, так как $15^0 = 1$ $\qquad$ $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, так как $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

Из определения логарифма получаются следующие важные равенства:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{и} \quad \log_a a = 1$$

Эти тождества следуют из равенств $a^0 = 1$ и $a^1 = a$. Логарифм по основанию 10 имеет специальное обозначение $\log_{10} x = \lg x$ и называется **десятичным логарифмом**. Для десятичных логарифмов справедливы равенства:

$$10^{\lg x} = x, \quad \lg 10^n = n$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\log_{16} 4x = \frac{1}{4}$.

По определению логарифма

$$16^{\frac{1}{4}} = 4x \Rightarrow \sqrt[4]{16} = 4x \Rightarrow 2 = 4x \Rightarrow x = 0,5$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\log_2 (9x - 1) = 3$.

По определению логарифма

$$2^3 = 9x - 1 \Rightarrow 8 = 9x - 1 \Rightarrow 9 = 9x \Rightarrow x = 1$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $10^x = 35$.

По определению логарифма

$$x = \log_{10} 35 = \lg 35$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $3^{\log_3\left(x^2-4x+3\right)}=x-3$.

Применяя основное логарифмическое тождество ($a^{\log_a b}=b$) получим

$$3^{\log_3(x^2-4x+3)}=x-3 \;\Rightarrow\; x^2-4x+3=x-3 \;\Rightarrow\; x^2-5x+6=0 \;\Rightarrow\; x_1=2;\quad x_2=3.$$

Поскольку при применении основного логарифмического тождества могли появиться посторонние корни, необходима проверка. По определению логарифма, подлогарифмическое выражение $\left(x^2-4x+3\right)$ должно быть всегда положительно (**строго** больше нуля):

$x=2$: $\left(x^2-4x+3\right)=2^2-4\cdot 2+3=-1$ – x=2 не является корнем.

$x=3$: $\left(x^2-4x+3\right)=3^2-4\cdot 3+3=0$ –x=3 не является корнем.

Ответ: уравнение не имеет решений.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\log_{\frac{15+x}{x}} 4-1=0$.

Обратите особое внимание на слагаемое «–1». Оно не является частью подлогарифмического выражения. Если бы оно им являлось, то уравнение имело бы вид $\log_{\frac{15+x}{x}}(4-1)=0$. Поэтому перенесем –1 в правую часть уравнения. Получим $\log_{\frac{15+x}{x}} 4=1$. Так как логарифм равен 1, то

$$\frac{15+x}{x}=4^1 \;\Rightarrow\; 15+x=4x \;\Rightarrow\; x=5$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\log_{2x+3}\frac{1}{4}=-2$.

Сразу же запишем ОДЗ $\begin{cases}2x+3>0\\2x+3\neq 1\end{cases}$. Из определения логарифма получаем

$$(2x+3)^{-2}=\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \frac{1}{(2x+3)^2}=\frac{1}{2^2} \;\Rightarrow\; (2x+3)^2=2^2 \;\Rightarrow$$

$$2x+3=2 \quad \text{или} \quad 2x+3=-2 \;\Rightarrow\; x_1=-0{,}5,\; x_2=-2{,}5$$

Второй корень не удовлетворяет области допустимых значений. **Ответ:** x = –0,5.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\log_{16}\left(2+\log_2(3+x)\right)=0$.

Не надо пугаться присутствия логарифма в подлогарифмическом выражении. Просто представьте, что задание выглядит вот так: $\log_{16}(y)=0$, где $(y)=\left(2+\log_2(3+x)\right)$. Такое уравнение мы легко решим по определению логарифма: $\log_{16}(y)=0 \;\Rightarrow\; 16^0=y \;\Rightarrow\; y=1$. А сейчас сделаем обратную замену:

$$2+\log_2(3+x)=1 \;\Rightarrow\; \log_2(3+x)=-1 \;\Rightarrow\; 3+x=2^{-1} \;\Rightarrow\; 3+x=0{,}5 \;\Rightarrow\; x=-2{,}5$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\log_3\log_{\frac{1}{2}}\log_{27}x=0$.

Перепишем для удобства уравнение в другом виде и применим основное свойство логарифма несколько раз. Получим

$$\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{27}x\right)\right)=0 \;\Rightarrow\; \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{27}x\right)=3^0 \;\Rightarrow\; \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{27}x\right)=1 \text{ так как } 3^0=1.$$

Тогда $\log_{27}x=\left(\frac{1}{2}\right)^1$. Окончательно получаем: $x=(27)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

И еще раз основные требования, предъявляемые к логарифму.

– основание логарифма всегда больше нуля и не равно 1 (так как 1 в любой степени равен 1);

– подлогарифмическое выражение всегда больше нуля (так как при возведении положительного числа в любую степень получается положительное число).

Тест 7.01.02. Решите уравнения

1. $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$.

2. $\log_3(2-x) = 2$.

3. $\log_{0,2}(x+3) = -1$.

4. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{x+1} = -1$.

5. $\log_{\frac{1}{(10-x)^3}} 5 - \frac{1}{3} = 0$.

6. $\log_{\frac{1}{2}}(3-\log_3(x-2)) = 0$.

7. $\log_{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}(x^3-2x^2-x+2) = -6$.

8. $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \log_9 x = 0$.

9. $\log_4 \log_3 \log_2(x^2-1) = 0$.

10. $4^x = 10$.

11. $3^{2x} = 6$.

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
16	–7	2	26	9,8	11
7.	**8.**	**9.**	**10.**	**11**	
3	3	3, –3	$x = \log_4 10$	$x = 0,5\log_3 6$	

7.02. Свойства логарифмов

Свойств будет много. Все их надо знать наизусть!

Из определения логарифма вытекают следующие его свойства. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда:

1. $\log_a 1 = 0$, так как $a^0 = 1$.

2. $\log_a a = 1$, так как $a^1 = a$. Это свойство мы будем применять достаточно часто при решении уравнений и неравенств. Согласно ему, мы можем превратить любое число в логарифм.

ПРИМЕРЫ. $3 = 3\cdot\log_2 2 = \log_2 2^3 = \log_2 8$, $\quad 0,5 = 0,5\cdot\log_4 4 = \log_4 4^{0,5} = \log_4\sqrt{4} = \log_4 2$

3. Если $x > 0$ и $y > 0$, то $\quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad$ или $\quad \log_a x + \log_a y = \log_a xy$

ПРИМЕРЫ.

$$\log_2 14 = \log_2 7\cdot 2 = \log_2 7 + \log_2 2 = \log_2 7 + 1; \qquad \log_{12} 9 + \log_{12} 16 = \log_{12}(9\cdot 16) = \log_{12} 144 = 2$$

$$\log_2 5 + \log_2 \frac{4}{5} = \log_2\left(5\cdot\frac{4}{5}\right) = \log_2 4 = 2 \qquad \lg 20 = \lg(10\cdot 2) = \lg 10 + \lg 2 = 1 + \lg 2.$$

Это свойство не будет работать, если перед логарифмом будет стоять какой–нибудь коэффициент! Что делать с коэффициентом вы узнаете изучив свойство 5.

4. Если $x > 0$ и $y > 0$, то $\quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad$ или $\quad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

ПРИМЕРЫ. $\log_5 0,4 = \log_5 \frac{2}{5} = \log_5 2 - \log_5 5 = \log_5 2 - 1$; $\quad \log_2 24 - \log_2 3 = \log_2\left(\frac{24}{3}\right) = \log_2 8 = 3$

$$\log_2 20 - \log_2 5 = \log_2 \frac{20}{5} = \log_2 4 = 2$$

Это свойство аналогично свойству 4 и тоже не будет работать, если перед логарифмом будет стоять какой–нибудь коэффициент! Что делать с коэффициентом вы узнаете изучив свойство 5.

5. Если $x > 0$, то $\quad \log_a x^p = p\log_a x \quad$ или $\quad p\log_a x = \log_a x^p$

То есть мы имеем право «проглотить» или «выплюнуть» степень подлогарифмического выражения. Какой именно вариант мы будем применять при решении задач зависит от самой задачи.

ПРИМЕРЫ. $\log_2 49 = \log_2 7^2 = 2\log_2 7$; $\quad \log_3\sqrt[4]{5} = \log_3 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_3 5$

$$\log_2^2 8 = (\log_2 8)^2 = \left(\log_2 2^3\right)^2 = (3\log_2 2)^2 = 3^2 \qquad \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4\cdot 1 = 4$$

$$\log_2 0,25 = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2\log_2 2 = -2 \qquad \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3\cdot\log_3 3 = -3$$

А теперь пример, в котором мы сначала применим свойство 5 (для второго слагаемого) и лишь потом свойство 4 (для первого и второго слагаемого) и свойство 3 (для того, что получилось из первого и второго слагаемых, и третьего слагаемого)

$$\log_3 4 - 4\log_3 2 + \log_3 \frac{4}{9} = \log_3 4 - \log_3 2^4 + \log_3 \frac{4}{9} = \log_3 \frac{4}{2^4} + \log_3 \frac{4}{9} = \log_3 \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}\right) = \log_3 3^{-2} = -2\log_3 3 = -2$$

6. Если $x > 0$, то $\quad \log_{a^q} x = \frac{1}{q}\log_a x \quad$ или $\quad \frac{1}{q}\log_a x = \log_{a^q} x$

То есть мы имеем право «проглотить» или «выплюнуть» степень основания логарифма. Какой именно вариант мы будем применять при решении задач зависит от самой задачи.

ПРИМЕРЫ. $\log_8 4 = \log_{2^3} 4 = \frac{1}{3}\log_2 4 = \frac{1}{3}\cdot 2$; $\qquad \log_{\sqrt[3]{9}} 9 = \log_{(9)^{\frac{1}{3}}} 9 = \frac{1}{\frac{1}{3}}\log_9 9 = 3$

Очень часто свойства 5 и 6 применяются друг за другом. Например, сначала мы применяем свойство 6 (выплевываем степень от основания логарифма), а потом применяем свойство 5 и проглатываем получившийся коэффициент.

7. Если $x > 0$, то $\quad \log_{a^q} x^p = \frac{p}{q}\log_a x$ (одновременно применяем свойство 5 и 6)

ПРИМЕРЫ. $\log_9 4 = \log_{3^2} 2^2 = \frac{2}{2}\log_3 2 = \log_3 2$; $\qquad \log_{\sqrt{27}} \frac{1}{81} = \log_{27^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{3^{24}} = \log_{3^{\frac{3}{2}}} 3^{-4} = \frac{-4}{\frac{3}{2}}\log_3 3 = -\frac{8}{3}\cdot 1 = -\frac{8}{3}$

$$\log_4^2 \sqrt{2} = \left(\log_4 \sqrt{2}\right)^2 = \left(\log_{2^2} 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\log_2 2\right)^2 = \frac{1}{16}; \qquad \log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}\right) = \log_{2^{0,5}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{1}{0,5}\log_2(2) = 2$$

Из этого свойства следует, что если степени подлогарифмического выражения и основания логарифма равны, то мы имеем право их сократить: $\log_{16} 81 = \log_{2^4} 3^4 = \log_2 3$

8. Если $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$, то $\quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad$ или $\quad \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a x$

Эта формула называется **формулой перехода к новому основанию**. Новое основание логарифмов b выбирается из соображения удобства и будет в каждом примере разное. Это достаточно сложное свойство. Обычно мы будем его применять для решения достаточно сложных примеров.

ПРИМЕР. *Вычислите* $\log_6 5$, если $\log_3 2 = x$, $\lg 2 = y$

Перейдем в $\log_6 5$ к основанию 2. Почему? Посмотрите внимательно на условие. Получаем

$$\log_6 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 6} = \frac{\log_2 \frac{10}{2}}{\log_2 2\cdot 3} = \frac{\log_2 10 - \log_2 2}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{\log_2 10 - 1}{1 + \log_2 3}$$

Однако по условию: $\log_3 2 = x \Rightarrow \log_2 3 = \frac{1}{x}$. Аналогично $\lg 2 = y \;\Rightarrow\; \log_2 10 = \frac{1}{y}$. Значит,

$$\log_6 5 = \frac{\log_2 10 - 1}{1 + \log_2 3} = \frac{1/y - 1}{1 + 1/x}$$

ПРИМЕР. *Упростите* $\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9$

Перейдем к основанию 10. Получаем $\quad \log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9 = \frac{\lg 5}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 7}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 9}{\lg 7} = \frac{\lg 9}{\lg 3} = \log_3 9 = 2$

9. Если $a>0$, $b>0$, то $a\neq 1$, $b\neq 1$, то $\qquad \log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ $\qquad$ или $\qquad \log_a b\cdot\log_b a=1$

Обратите внимание, что при «переворачивании» логарифма, число, стоящее перед логарифмом, не переворачивается.

$$\log_4 2=\frac{1}{\log_2 4}=\frac{1}{2}=0,5 \qquad \frac{4}{3\log_{125}9}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\log_{125}9}=\frac{4\log_9 125}{3}=\frac{4}{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\log_3 5=2\log_3 5$$

$$36^{\frac{2}{\log_4 6}}=36^{2\log_6 4}=6^{4\log_6 4}=6^{\log_6 4^4}=4^4=256 \qquad 27^{\frac{1}{3\log_{16}81}}=(27^{1/3})^{\frac{1}{\log_{16}81}}=3^{\frac{1}{\log_{16}81}}=3^{\log_{81}16}=3^{\log_3 2}=2.$$

$$81^{-\log_{\frac{1}{2}}3\cdot\log_{\frac{1}{3}}4+2,5}=81^{-2\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2+2,5}=81^{-2\cdot 1+2,5}=81^{0,5}=9.$$

10. $\quad a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

ПРИМЕРЫ.

$$36^{\log_6 2}=2^{\log_6 36}=2^2=4; \qquad 2^{\log_{\sqrt{2}}5}=5^{\log_{\sqrt{2}}2}=5^{\log_{(2)^{1/2}}2}=5^{\frac{1}{1/2}\log_2 2}=5^2=25$$

При преобразованиях помните:

1. Если у Вас логарифм в какой–либо степени, то лучше сразу переписать логарифм в виде

$$\log_a^n b=(\log_a b)^n$$

2. Если у Вас сложный логарифм, то очень важно при вычислениях правильно расставить скобки

$$\log_2^2\log_3\log_2 8=\left(\log_2\left(\log_3\left(\log_2 8\right)\right)\right)^2$$

При этом преобразования начинаем с самого дальнего (глубокого) логарифма.

3. Всегда начинайте с преобразований, в которых все числа записывают в виде числа со степенью, причем основание степени должно быть наименьшим.

Тест 7.02.02. Вычислите

1. $\log_{25}125$

2. $\log_{\frac{1}{9}}3$

3. $\log_{\frac{1}{16}}\dfrac{1}{4}$

4. $\log_{\frac{1}{3}}3\sqrt{3}$

5. $\log_2^3 8$

6. $\sqrt{\log_3 81}$

7. $\log_3^4\dfrac{1}{9}$

8. $\sqrt[3]{\log_2 256}$

9. $\sqrt{\left(-2\log_3\dfrac{1}{9}\right)}$

10. $\log_3 21+\log_3 2-\log_3 14$

11. $\log_4 91-\log_4 13+\log_4\dfrac{2}{7}$

12. $\log_3 63-\log_3 9+\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{27}{49}$

13. $\log_2 3-\log_2 30+\log_2 5$

14. $\log_5 150-\log_5 3+\log_5\dfrac{1}{2}$

15. $\log_9\log_4\left(\sqrt[3]{4}\right)$

16. $\log_{16}^3\log_3 81$

17. $\log_{\frac{3}{2}}\log_{25}125$

18. $\log_{\frac{16}{9}}\log_{27}81$

19. $6^{\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}2}$

20. $7^{\log_{\sqrt{7}}4}$

21. $3^{\log_3(\sqrt{3})^8}$

22. $4^{\log_2\sqrt{7}}$

23. $2^{\log_4 9}$

24. $\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25}7}}$

25. $25^{\frac{1}{2\log_{49}25}}$

26. $4^{-\frac{2}{\log_5 4}}$

1	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**
1,5	–0,5	0,5	1,5	27	2	16	2	2	1	0,5	1,5	–1
14.	**15.**	**16.**	**17.**	**18.**	**19.**	**20.**	**21.**	**22.**	**23.**	**24.**	**25.**	**26.**
2	–0,5	0,125	1	0,5	0,25	16	81	7	3	25	7	0,04

7.03. Вычисления

Вспомним основные логарифмические свойства

1. $\log_a 1 = 0$ **2.** $\log_a a = 1$ **3.** $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ или $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ или $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$ **5.** $\log_a x^p = p\log_a x$ **6.** $\log_{a^q} x = \dfrac{1}{q}\log_a x$

7. $\log_{a^q} x^p = \dfrac{p}{q}\log_a x$ **8.** $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ **9.** $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ **10.** $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

ПРИМЕР. *Вычислите* $3 \cdot \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} b$, *если* $\log_b a = 3$.

Не надо пытаться преобразовывать логарифмы! Воспользуемся одной хитростью. Из определения логарифма и по условию задачи следует, что $\log_b a = 3 \;\Rightarrow\; b^3 = a$. Подставим a в исходный пример. Получим

$$3 \cdot \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} b = 3 \cdot \log_{\frac{\sqrt{b^3}}{b}}\left(\frac{\sqrt[3]{b^3}}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\frac{\sqrt{b^3}}{b}} b = 3 \cdot \log_{\frac{b^{3/2}}{b}}\left(\frac{b}{b^{1/2}}\right) + \log_{\frac{b^{3/2}}{b}} b =$$

$$= 3 \cdot \log_{b^{1/2}} b^{1/2} + \log_{b^{1/2}} b = 3 \cdot 1 + \log_{b^{1/2}}\left(b^{1/2}\right)^2 = 3 + 2 \cdot \log_{b^{1/2}} = 5$$

ПРИМЕР. *Вычислите* $\log_{a^3\sqrt[4]{b^7}}\left(\dfrac{a^2b^5}{\sqrt[13]{ab}}\right)^{-\frac{1}{5}}$, если $\log_{a^3} \sqrt{b} = 2$.

Как Вы могли убедиться на предыдущем примере, надо сразу подставить дополнительное условие в исходное уравнение. Из дополнительного условия получаем

$$\log_{a^3} \sqrt{b} = 2 \;\Rightarrow\; \left(a^3\right)^2 = \sqrt{b} \;\Rightarrow\; a^6 = \sqrt{b} \;\Rightarrow\; a^{12} = b$$

Подставим данное выражение в исходное

$$\log_{a^3\sqrt[4]{b^7}}\left(\frac{a^2b^5}{\sqrt[13]{ab}}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left\{b = a^{12}\right\} = \log_{a^3\sqrt[4]{\left(a^{12}\right)^7}}\left(\frac{a^2\left(a^{12}\right)^5}{\sqrt[13]{a \cdot a^{12}}}\right)^{-\frac{1}{5}} = \log_{a^3\sqrt[4]{a^{84}}}\left(\frac{a^2 \cdot a^{60}}{\sqrt[13]{a^{13}}}\right)^{-\frac{1}{5}} = \log_{a^3 \cdot a^{\frac{84}{4}}}\left(\frac{a^{62}}{a}\right)^{-\frac{1}{5}} =$$

$$= \log_{a^3 \cdot a^{21}}\left(a^{61}\right)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{1}{5}\log_{a^{24}} a^{61} = -\frac{1}{5}\left(\frac{61}{24}\right)\log_a a = -\frac{61}{120}$$

ПРИМЕР. *Вычислите* $\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_2 3 \cdot \log_3 4\right)$

Надо сразу же обратить внимание, что подлогарифмиеское выражение $\left(\log_2 3 \cdot \log_3 4\right)$ можно привести к виду $\log_a b \cdot \log_b a$. А это выражение равно 1 (свойство 9). Преобразовываем

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_2 3 \cdot \log_3 4\right) = \log_{\frac{1}{4}}\left(\log_2 3 \cdot \log_3 2^2\right) = \log_{\frac{1}{4}}\left(2 \cdot \left(\log_2 3 \cdot \log_3 2\right)\right) =$$

$$= \log_{\frac{1}{4}}(2 \cdot 1) = \log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_{2^{-2}} 2 = \frac{1}{-2}\log_2 2 = -\frac{1}{2}$$

ПРИМЕР. *Вычислите* $\left(3^{1+\frac{1}{2\log_4 3}} + 8^{\frac{1}{3\log_9 2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$

Очень много примеров из этой темы лучше решать по действиям.

$$3^{1+\frac{1}{2\log_4 3}}=3^{1+\frac{\log_3 4}{2}}=3^{1+\frac{1}{2}\log_3 4}=3^{1+\log_3 (4)^{\frac{1}{2}}}=3^{1+\log_3 2}=3^1\cdot 3^{\log_3 2}=3\cdot 2=6$$

$$8^{\frac{1}{3\log_9 2}}=8^{\frac{1}{3}\cdot\log_2 9}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^{\log_2 9}=2^{\log_2 9}=9$$

С учетом преобразований получаем

$$(6+9+1)^{\frac{1}{2}}=(16)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=4$$

ПРИМЕР. *Вычислите* $(\log_2 3+\log_3 16+4)(\log_2 3-2\log_{12} 3)\log_3 2-\log_2 3$

Данный пример тоже решаем по действиям. Сначала поработаем с первой скобкой

$$\log_2 3+\log_3 16+4=\log_2 3+4\log_3 2+4=\frac{1}{\log_3 2}+4\log_3 2+4=\frac{1+4\log_3 2\cdot\log_3 2+4\cdot\log_3 2}{\log_3 2}=\frac{(1+2\log_3 2)^2}{\log_3 2}$$

Потом со второй

$$\log_2 3-2\log_{12} 3=\frac{1}{\log_3 2}-\frac{2}{\log_3 12}=\frac{1}{\log_3 2}-\frac{2}{\log_3 3+\log_3 4}=\frac{1}{\log_3 2}-\frac{2}{1+2\log_3 2}=$$

$$=\frac{1}{\log_3 2}-\frac{2}{1+2\log_3 2}=\frac{1+2\log_3 2-2\log_3 2}{\log_3 2(1+2\log_3 2)}=\frac{1}{\log_3 2(1+2\log_3 2)}$$

Окончательно получим

$$\frac{(1+2\log_3 2)^2}{\log_3 2}\cdot\frac{1}{\log_3 2(1+2\log_3 2)}\cdot\log_3 2-\log_2 3=\frac{1+2\log_3 2}{\log_3 2}-\frac{1}{\log_3 2}=\frac{2\log_3 2}{\log_3 2}=2$$

ПРИМЕР. *Вычислите* $27^{-\log_8 \frac{1}{25}\cdot\log_{\frac{1}{9}} 2\sqrt{2}}$

Данный пример опять решаем по действиям. Преобразуем каждый из логарифмов.

1. $\log_{\frac{1}{9}} 2\sqrt{2}=\log_{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)=\log_{3^{-2}} 2^{3/2}=\frac{3/2}{-2}\log_3 2=-\frac{3}{4}\log_3 2$

2. $\log_8 \frac{1}{25}=\log_{2^3}\left(\frac{1}{5}\right)^2=\log_{2^3} 5^{-2}=-\frac{2}{3}\log_2 5$

С учетом преобразований получаем

$$27^{-\log_8 \frac{1}{25}\cdot\log_{\frac{1}{9}} 2\sqrt{2}}=27^{-\left(\left(-\frac{3}{4}\log_3 2\right)\left(-\frac{2}{3}\log_2 5\right)\right)}=3^{-3\left(\frac{1}{2}\log_3 2\cdot\log_2 5\right)}=3^{-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_3 2\cdot\log_2 5}$$

Теперь нам необходимо число 3 возвести 4 раза в степень. Эти степени равны $-3,\ \frac{1}{2},\ \log_3 2,\ \log_2 5$. Самое главное выбрать правильный порядок возведения в степень. Его надо увидеть.

$$3^{-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_3 2\cdot\log_2 5}=\left(\left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_2 5}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(2^{\log_2 5}\right)^{-\frac{3}{2}}=5^{-\frac{3}{2}}$$

При преобразованиях важно помнить о:

1. Свойствах показательной функции. Все свойства нам не нужны, но некоторые точно понадобятся

$$a^{b-c}=\frac{a^b}{a^c},\quad a^{b+c}=a^b a^c,\quad a^{b\cdot c}=\left(a^b\right)^c,\quad a^x b^x=(a\cdot b)^x$$

2. О том, что свойства логарифма номер 3 и 4 применяются только когда, когда нет коэффициентов перед логарифмами и когда основания логарифмов одинаковые.

3. Самом главном свойстве – основном логарифмическом тождестве

$$a^{\log_a b}=b$$

Тест 7.03.02. Вычислите

1. $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$
2. $\log_3 64 \cdot \log_2 \dfrac{1}{27}$
3. $81^{0,5\log_9 7}$
4. $81^{\log_{27} 5 \cdot \log_5 4}$
5. $0,8 \cdot (1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$
6. $49^{1-\log_7 14} + 5^{-\log_5 4}$
7. $32^{\log_4 3 - 0,1\cdot\log_2 3}$
8. $\log_2(\log_{\sqrt{2}} 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} 2)$
9. $30^{\frac{4}{\log_2 6}} \cdot (0,2)^{\frac{4}{\log_2 6}}$
10. $0,7\left(2+\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3(1/16)}\right)^{\log_{\frac{9}{4}} 3}$
11. $2^{6\log_{2\sqrt{2}}(5-\sqrt{10})+8\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$
12. $\log_6 4 + \log_6 9 + \log_4 6 \cdot \log_{\sqrt{6}} 2 + 5^{\log_5 2}$
13. $\left(\sqrt[7]{\dfrac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3}+\frac{6}{5}\log_3 5} \cdot 5^{\frac{3}{5}}$
14. $4\sqrt{3} + 5^{\log_5 \frac{3}{5}} - 15^{\frac{1}{2}+\log_{15}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)}$
15. $\log_b(a^2 b)$ если $\log_a b = 7$
16. $A = 5^b + 6^c$ если $b = \dfrac{3}{\log_2 5}$, $c = (\log_5 6)^{-1}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
–3	–18	7	$4\sqrt[3]{4}$	4	0,5	9	3	16	2,1	25	5	1	0,6	9/7	13

7.04. Логарифмические уравнения

При решении логарифмических уравнений всегда обращайте внимание на ОДЗ!!! ОДЗ всегда записываем для **исходного**, а не преобразованного уравнения

Методы решения логарифмических уравнений можно условно разделить на два.

1. Когда в левой части мы получаем логарифм без коэффициента перед ним, а в правой части выражение или число. То есть мы должны получить уравнение вида

$$\log_a b = c$$

Такое уравнение решается при помощи основного логарифмического тождества

$$\log_a b = c \quad \Rightarrow \quad a^c = b$$

2. Когда мы получаем равенство логарифмов с одинаковыми основаниями. При этом перед логарифмами не должно быть никаких коэффициентов. То есть мы должны получить уравнение вида

$$\log_a b = \log_a c$$

Такое уравнение решается приравниванием подлогарифмических выражений

$$\log_a b = \log_a c \quad \Rightarrow \quad b = c$$

При решении уравнений помните, что любое число равно числу, умноженному на логарифм вида $\log_a a$. То есть $b = b\cdot\log_a a$, так как $\log_a a = 1$. При этом число a выбирается из соображений удобства (обычно a равно основанию логарифмов, которые уже присутствуют в уравнении). Зачем это делается? Все просто. Например, у нас в уравнении есть слагаемое 2:

$$2 = 2\cdot\log_3 3 = \log_3 3^2 = \log_3 9$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\lg(x+1,5) = -\lg x$

Попробуем решить это уравнение первым способом. Перенесем все в левую часть

$$\lg(x+1,5) + \lg x = 0$$

Объединим два логарифма при помощи свойства №3

$$\lg\left((x+1,5)x\right) = 0$$

Вот мы и пришли к уравнению вида $\log_a b = c$. А дальше все просто

$$\lg(x+1,5)x = 0 \quad \Rightarrow \quad \log_{10}(x+1,5)x = 0 \quad \Rightarrow \quad 10^0 = (x+1,5)x$$

При решении логарифмических уравнений важно не забывать про ОДЗ. Так же важно помнить, что ОДЗ мы записываем по **исходному**, а не преобразованному уравнению.

$$\begin{cases} x>0,\ \ x+1{,}5>0 \\ (x+1{,}5)x=10^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2+1{,}5x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Первый корень не подходит по ОДЗ.

Решим это уравнение вторым способом. В правой части перед логарифмом стоит коэффициент –1. При помощи свойства №5 перенесем эту степень на подлогарифмическое выражение

$$\lg(x+1{,}5)=-1\cdot\lg x \ \Rightarrow\ \lg(x+1{,}5)=\lg x^{-1}$$

А теперь приравниваем подлогарифмические выражения

$$\lg(x+1{,}5)=\lg x^{-1} \ \Rightarrow\ x+1{,}5=\frac{1}{x} \ \Rightarrow\ x^2+1{,}5x-1=0$$

Мы получили точно такое же уравнение. Какой способ выбрать зависит только от условия и от вашего желания. Оба способа работают и дают одинаковые ответы. **Ответ:** $x = 0{,}5$

ПРИМЕР. *Решить уравнение* $\lg(2x-5)^2=0$.

Решим уравнение первым способом

$$\lg(2x-5)^2=0 \ \Rightarrow\ \log_{10}(2x-5)^2=0 \ \Rightarrow\ 10^0=(2x-5)^2 \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} 2x-5=1 \\ 2x-5=-1 \end{array}\right. \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Оба корня подходят по ОДЗ.

А теперь попробуем второй способ. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\lg(2x-5)^2=0 \ \Rightarrow\ \lg(2x-5)^2=0\cdot\lg 10 \ \Rightarrow\ \lg(2x-5)^2=\lg 10^0 \ \Rightarrow\ \lg(2x-5)^2=\lg 1,$$

которое, в свою очередь, равносильно квадратному уравнению

$$(2x-5)^2=1.$$

Находим корни этого уравнения : x_1=3, x_2=2. s**Ответ:** x_1=3, x_2=2.

ПРИМЕР. *Решить уравнение* $\log_2\left(x^2+1\right)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

Найдем ОДЗ данного уравнения, для чего решим систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+1>0, \\ x-1>0 \end{cases}.$$

Первое неравенство системы выполняется при любых значениях переменной, второе – при $x>1$. Поэтому система имеет решение $x>1$. Для решения уравнения перейдем к одному основанию логарифмов (второй способ решения), а именно к основанию 2, воспользовавшись свойствами логарифмов:

$$\log_2\left(x^2+1\right)=\log_{2^{-1}}(x-1) \ \Rightarrow\ \log_2(x^2+1)=-\log_2(x-1) \ \Rightarrow\ \log_2(x^2+1)=\log_2\frac{1}{(x-1)} \ \Rightarrow\ x^2+1=\frac{1}{x-1}.$$

Решая полученное дробно–рациональное уравнение, находим:

$$x_1=0,\ \ x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \ x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Из найденных значений только $x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ входит в ОДЗ уравнения. **Ответ:** $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Начиная с этого примера вы сами должны определить каким способом мы решаем уравнение.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $2\lg x-\lg 4=-\lg\left(5-x^2\right)$

Запишем ОДЗ ($x>0;\ 5-x^2>0$) и перейдем к решению

$$\lg x^2-\lg 4+\lg\left(5-x^2\right)=0 \;\Rightarrow\; \lg x^2\left(5-x^2\right)-\lg 4=0 \;\Rightarrow\; \lg\frac{x^2\left(5-x^2\right)}{4}=0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2\left(5-x^2\right)}{4}=10^0 \;\Rightarrow$$

$$-x^4+5x^2-4=0 \;\Rightarrow\; \left\{x^2=a\right\} \;\Rightarrow\; -a^2+5a-4=0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} a_1=4 \\ a_2=1 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-2 \\ x_3=1 \\ x_4=-1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x=2;\,1$ (ответы -1 и -2 не подходят по ОДЗ)

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$

Запишем ОДЗ ($x+3>0,\quad x-1>0$) и перейдем к решению

$$\log_4(x+3)+\log_4 8-\log_4(x-1)=2 \;\Rightarrow\; \log_4 8(x+3)-\log_4(x-1)=2 \;\Rightarrow$$

$$\log_4\left(\frac{8(x+3)}{(x-1)}\right)=2 \;\Rightarrow\; \frac{8(x+3)}{(x-1)}=4^2 \;\Rightarrow\; 8x+24=16(x-1) \;\Rightarrow\; x=5$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $2\log_2(x-2)+\log_2(x-4)^2=0$

Очень важный пример, так как в нем есть ловушка! Сразу запишем ОДЗ $\begin{cases} x-2>0 \\ x\neq 4 \end{cases}$. При решении такого уравнения не допустите **типичную ошибку**. Многие переписывают это уравнение в виде (выплевывают степень)

$$2\log_2(x-2)+2\log_2(x-4)=0$$

Это неправильно!!! Почему? Тогда ОДЗ стало бы

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x-4>0 \\ x\neq 4 \end{cases}$$

А такое ОДЗ противоречит первоначальному ОДЗ. Правильно записать так

$$2\log_2(x-2)+2\log_2|x-4|=0$$

так как подлогарифмическое выражение должно остаться положительным. Таким образом, получаем

$$\log_2(x-2)+\log_2|x-4|=0 \;\Rightarrow\; \log_2\left((x-2)\cdot|x-4|\right)=0 \;\Rightarrow\; 2^0=(x-2)\cdot|x-4| \;\Rightarrow\; 1=(x-2)\cdot|x-4|$$

Получаем систему (вспоминайте как мы решали уравнения с модулем)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1=(x-2)\cdot(x-4) \\ x-4\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+7=0 \\ x-4\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3+\sqrt{2},\quad x_2=3-\sqrt{2} \\ x-4\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1=(x-2)\cdot(-x+4) \\ x-4<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+9=0 \\ x-4<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=3 \\ x-4<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Корень x_2 не удовлетворяет ОДЗ. **Ответ:** $x=3+\sqrt{2};\ x=3$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\lg(x+1)^2+\lg(x+9)^2=2\lg 9$.

Тут аналогичная ловушка! Однако в этом примере степень можно не выплевывать. Поэтому решим этот пример немного иначе. Объединим логарифмы

$$\lg(x+1)^2+\lg(x+9)^2=2\lg 9 \;\Rightarrow\; \lg(x+1)^2\cdot(x+9)^2=\lg 9^2 \;\Rightarrow\; (x+1)^2\cdot(x+9)^2=9^2$$

А теперь вспомним, что если $x^2=25$, то $x=5$ и $x=-5$. Поэтому

$$(x+1)(x+9)=\pm 9$$

а) $x^2+10x+9=9$

$x^2+10x=0$

$x=0;\quad x=-10$

б) $x^2+10x+9=-9$

$x^2+10x+18=0$

$x=-5\pm\sqrt{7}$

Так как ОДЗ уравнения составляют любые действительные значения x, отличные от –1 и –9, то решением уравнения являются все найденные значения x.

Ответ: $x=0$; $x=-10$; $x=-5\pm\sqrt{7}$.

А можно было решить через модули. После выплевывания степеней получим

$$2\lg|x+1|+2\lg|x+9|=2\lg 9 \quad\Rightarrow\quad \lg|x+1|+\lg|x+9|=\lg 9 \quad\Rightarrow\quad \lg|x+1|\cdot|x+9|=\lg 9 \quad\Rightarrow\quad |x+1|\cdot|x+9|=9$$

При решении примеров помните, что $\log_a b^2=2\log_a|b|$, иначе Вы потеряете корни!!! Так надо действовать в случае любой **четной** степени, если в подлогарифмическом выражении содержится переменная!!!

ПРИМЕР. *Решить уравнение* $1-\lg 5=\frac{1}{3}\left(\lg\frac{1}{2}+\lg x+\frac{1}{3}\lg 5\right)$.

Поскольку $1-\lg 5=\lg 10-\lg 2=\lg\frac{10}{5}=\lg 2$ и $\lg\frac{1}{2}=-\lg 2$, то получим

$$4\lg 2-\frac{1}{3}\lg 5=\lg x \quad\Rightarrow\quad \lg\frac{16}{\sqrt[3]{5}}=\lg x.$$

Отсюда получаем $x=\frac{16}{\sqrt[3]{5}}$ –единственный корень данного уравнения. **Ответ:** $x=\frac{16}{\sqrt[3]{5}}$.

Тест 7.04.02. Решите уравнения

1. $\lg(x+1{,}5)=-\lg x$

2. $\log_3(2x^2+5x+6)=\lg 100$

3. $\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)$

4. $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+\log_2 4)=1$

5. $\log_{\sqrt{2}}9\cdot\log_3\left(\sqrt[4]{2}(x-2)\right)=1$

6. $\log_2(x-1)^2=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(4(x-1))+\log_{\sqrt{2}}16$

7. $\lg 5+\lg(x+10)-1=\lg(21x-20)-\lg(2x-1)$

8. $\log_5(x-2)-2\log_5\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\log_5(x+13)$

9. $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1$

10. $\lg(5-x)-\frac{1}{3}\lg(35-x^3)=0$

11. $\log_2\frac{x-5}{x+5}+\log_2(x^2-25)=0$

12. $\frac{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}{\lg 8-\lg(x-5)}=-1$

13. $\log_3(9^x+9)=x+\log_3(28-2\cdot 3^x)$

14. $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6$

15. $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2-\frac{1}{2}=0$

16. $4^{2\log_8(2x-2)}\cdot 0{,}25^{\log_8(2x-3)}=\sqrt[3]{16}$

17. $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}$

18. $\log_3(\sqrt{12+x}-2)=\frac{1}{2}\log_3(x+2)$

19. $\log_{2x+5}(2\sqrt{2x+5}-2x-3)=0{,}5$

20. $\log_{14-x}(4x-\sqrt{14-x})=0{,}5$

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0,5	–3; 0,5	9	1	3	3	1,5; 10	5	0	2;3
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
6	29	2; –1	1	–5/4	2	0	0,25	–1/2	1,75

7.05. Замена переменных

Не всегда логарифмические уравнение удобно решать «в лоб». Иногда проще сделать замену переменной, как это мы делали в самом начале в разделе «Уравнения».

ПРИМЕР. *Решить уравнение* $\frac{1}{5-4\lg x}+\frac{4}{1+\lg x}=3$.

В этом уравнении замена очевидна. Пусть $t=\lg x$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{1}{5-4t}+\frac{4}{1+t}=3$$

Решим полученное дробно–рациональное уравнение

$$\frac{1}{5-4t}+\frac{4}{1+t}=3 \;\Rightarrow\; \frac{1+t+4(5-4t)-3(5-4t)(1+t)}{(5-4t)(1+t)}=0 \;\Rightarrow\; \frac{(t-1)(2t-1)}{(5-4t)(1+t)}=0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Делаем обратную замену и решаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x=1, \\ \lg x=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \;\Rightarrow\; x_1=10,\; x_2=\sqrt{10}$$

Ответ: $x_1=10$, $x_2=\sqrt{10}$.

ПРИМЕР. *Решить уравнение* $\log_2(2x^2)\cdot\log_2(16x)=\frac{9}{2}\log_2^2 x$.

Запишем ОДЗ: $x>0$. В этом уравнении замена не очевидна. Поэтому воспользуемся свойствами логарифмов и преобразуем первоначальное уравнение

$$(2\log_2 x+1)(4+\log_2 x)=\frac{9}{2}\log_2^2 x$$

Введем новую переменную $t=\log_2 x$. Тогда уравнение примет вид:

$$(2t+1)(4+t)-\frac{9}{2}t^2=0.$$

Найдем корни этого квадратного уравнения $t_1=4$, $t_2=-\frac{2}{5}$. Первоначальное уравнение, таким образом, свелось к двух простейшим логарифмическим уравнениям:

$$\log_2 x=4,\;\; \log_2 x=-\frac{2}{5}.$$

Решив эти уравнения получим: $x_1 = 16$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$. Оба подученных корня входят в область допустимых решений первоначального уравнения. **Ответ:** $x_1 = 16$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\log_{0,5}^2 4x+\log_2\frac{x^2}{8}=8$

Преобразуем слагаемые уравнения

$$\log_{0,5}^2 4x=\left(\log_{2^{-1}} 4x\right)^2=\left(-1\cdot\log_2 4x\right)^2=\left(\log_2 4+\log_2 x\right)^2=\left(\log_2 4+\log_2 x\right)^2=\left(2+\log_2 x\right)^2$$

$$\log_2\frac{x^2}{8}=\log_2 x^2-\log_2 8=\log_2 x^2-\log_2 2^3=2\log_2|x|-3$$

С учетом преобразований получаем

$$\left(2+\log_2 x\right)^2+2\log_2|x|-3-8=0$$

Так как $x > 0$ (смотрим на первое слагаемое оригинального уравнения), то модуль нам не нужен. Сделаем замену. Пусть $\log_2 x=t$. Тогда

$$\left(2+t\right)^2+2t-11=0$$

Я рекомендую переходить к замене в тот момент, когда она станет очевидной. Конечно можно было бы сначала раскрыть скобки и привести подобные и только потом сделать замену, но такие действия могут привести к ошибке, так как одно дело раскрывать скобки, когда у вас переменная *t* и совсем другое когда $\log_2 x$. Вот как бы выглядели преобразования без замены

$$\left(2+\log_2 x\right)^2+2\log_2 x-3-8=0 \;\Rightarrow\; 4+4\log_2 x+\left(\log_2 x\right)^2+2\log_2 x-11=0 \;\Rightarrow\; \left(\log_2 x\right)^2+6\log_2 x-7=0$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим следующее уравнение с заменой

$$t^2+6t-7=0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} t_1=-7 \\ t_2=1 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \log_2 x=-7 \\ \log_2 x=1 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=2^{-7} \\ x=2^{1} \end{array}\right.$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $(\lg 100x)^2+(\lg 10x)^2=14+\lg\frac{1}{x}$

Преобразуем слагаемые уравнения

$$(\lg 100x)^2=(\lg 100+\lg x)^2=(2+\lg x)^2; \quad (\lg 10x)^2=(\lg 10+\lg x)^2=(1+\lg x)^2; \quad \lg\frac{1}{x}=\lg x^{-1}=-\lg x$$

Уравнение примет вид

$$(2+\lg x)^2+(1+\lg x)^2=14-\lg x$$

И опять как только замена очевидна – сразу же ее осуществляем. Пусть $\lg x=t$, тогда

$$(2+t)^2+(1+t)^2=14-t \;\Rightarrow\; 2t^2+7t-9=0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=-\frac{9}{2} \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \lg x=1 \\ \lg x=-\frac{9}{2} \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=10^{-\frac{9}{2}} \end{array}\right.$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2\right)^2+\log_2(x-1)=5$

Преобразуем первое слагаемое уравнения

$$\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2\right)^2=\left(\log_{2^{-1}}(x-1)^2\right)^2=\left(\frac{2}{-1}\log_2(x-1)\right)^2=\left(\frac{2}{-1}\right)^2(\log_2 x-1)^2=4(\log_2 x-1)^2$$

Уравнение примет вид $4(\log_2 x-1)^2+\log_2(x-1)=5$. Замена очевидна $\log_2(x-1)=t$.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\lg^2 x-\lg x^2=\lg^2 3-1$

Перепишем уравнение в виде $\lg^2 x-2\lg x-(\lg^2 3-1)=0$. Заменим $\lg x=t$. Получим

$$t^2-2t-(\lg^2 3-1)=0$$

Не пугаемся корявого коэффициента *c*. Верим, что все будет хорошо

$$D=(2)^2-4\left(-(\lg^2 3-1)\right)=4-4(1-\lg^2 3)=4-4+4\lg^2 3=4\lg^2 3=(2\lg 3)^2$$

$$t_{1,2}=\frac{2\pm 2\lg 3}{2}=1\pm\lg 3 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \lg x=1+\lg 3 \\ \lg x=1-\lg 3 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x_1=10^{1+\lg 3}=10\cdot 10^{\lg 3}=30 \\ x_2=10^{1-\lg 3}=\frac{10}{10^{\lg 3}}=\frac{10}{3} \end{array}\right.$$

Тест 7.05.02. Решите уравнения

1. $\frac{\lg(x-9)}{6}=\frac{3}{\lg(x-9)^2}$.

2. $3\lg^2(x-1)-10\lg(x-1)+3=0$.

3. $\frac{\lg x}{2\lg x+1}+\frac{2\lg x+1}{\lg x}=2$

4. $\log_2^2 x^3-144\log_2\sqrt{x}-81=0$.

5. $\lg(10x)\cdot\lg(0{,}1x)=\lg x^3-3$.

6. $\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0$.

7. $\log_{\frac{1}{3}}^2\frac{x}{9}+\log_{\frac{1}{3}}^2\frac{x}{3}=1$.

8. $\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6$

1	2	3	4	5	6	7	8
1009; 9,001	1001, $\sqrt[3]{10}+1$	1/10	0,5; 512	10; 100	–64; –1	3; 9	$\log_3\frac{28}{27}$; $\log_3 10$

7.06. Метод перехода к новому основанию

Данный метод решения логарифмических уравнений основан на следующем свойстве:

$$\text{если } b>0 \text{ и } b\neq 1, \text{ то } \log_a b=\frac{1}{\log_b a} \text{ или наоборот } \frac{1}{\log_b a}=\log_a b$$

Напомню, что эта формула называется **формулой перехода к новому основанию**.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\log_3 x+\log_x 9=3$.

Немного упростим уравнение

$$\log_3 x+\log_x 9=3 \;\Rightarrow\; \log_3 x+\log_x 3^2=3 \;\Rightarrow\; \log_3 x+2\log_x 3=3$$

Мы получили почти одинаковые логарифмы (они будут одинаковыми, если поменять местами основание и подлогарифмическое выражение). Поэтому воспользуемся свойством $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ и перейдем к новому основанию

$$\log_3 x+2\log_x 3=3 \;\Rightarrow\; \log_3 x+\frac{2}{\log_3 x}=3.$$

Обращаю ваше внимание на то, что коэффициенты остаются на своих местах! Например, коэффициент перед вторым логарифмом мы не трогаем и оставляем в числителе!!! А дальше все просто. Пусть $\log_3 x=t$, тогда уравнение примет вид

$$t+\frac{2}{t}=3 \;\Rightarrow\; t^2-3t+2=0,$$

Дальше работаем как в теме 7.05. **Ответ:** 3; 9.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $\log_{0,5x} x^2-14\cdot\log_{16x} x^3+40\cdot\log_{4x}\sqrt{x}=0$

У нас нет свойств, при помощи которых мы можем работать с произведением в **основании** логарифма. Поэтому нам надо перевернуть логарифм и поменять местами основание и подлогарифмическое выражение. Только для начала вынесем степени от подлогарифмических выражений

$$\log_{0,5x}(x)^2-14\cdot\log_{16x}(x)^3+40\cdot\log_{4x}(x)^{\frac{1}{2}}=0 \;\Rightarrow\; 2\log_{0,5x} x-14\cdot 3\cdot\log_{16x} x+40\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_{4x} x=0$$

Перейдем к новому основанию. Не забываем, что коэффициенты перед логарифмами мы не трогаем!!!

$$2\log_{0,5x} x-14\cdot 3\cdot\log_{16x} x+40\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_{4x} x=0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{\log_x 0,5x}-\frac{14\cdot 3}{\log_x 16x}+\frac{40\cdot\frac{1}{2}}{\log_x 4x}=0$$

И вот сейчас мы легко можем применить свойство $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$. Получим

$$\frac{2}{\log_x x+\log_x 0,5}-\frac{42}{\log_x x+\log_x 16}+\frac{20}{\log_x x+\log_x 4}=0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+\log_x 2^{-1}}-\frac{21}{1+\log_x 2^4}+\frac{10}{1+\log_x 2^2}=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1-\log_x 2}-\frac{21}{1+4\cdot\log_x 2}+\frac{10}{1+2\cdot\log_x 2}=0$$

Важно помнить, что к переход новому основанию может сузить область определения исходного уравнения. **Поэтому помним о том, что ОДЗ мы записываем только по исходному уравнению.** Далее делаем замену $\log_x 2=t$ и решаем как предыдущий пример.

Меняя основание всегда проверяйте не меняется ли ОДЗ. Если меняется, то не входящие в новое ОДЗ точки подставьте в исходное уравнение!!!

Тест 7 06 02. Решите уравнения

1. $\dfrac{1}{\log_9 x}+\log_{x^2} 729=10$
2. $\sqrt{\log_5^2 x+\log_x^2 5+2}=2,5$
3. $\log_4 x+\log_x \dfrac{1}{16}=1$
4. $1+\log_2 32+\log_{0,5} x-9\log_x 2=0$
5. $\log_x\left(9x^2\right)\cdot\log_3^2 x=4$
6. $\log_{x+1}(x-0,5)=\log_{x-0,5}(x+1)$

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$\sqrt{3}$	$\frac{1}{25};\frac{1}{\sqrt{5}};\sqrt{5};25$	1/4; 16	8	1/9; 3	1

7.07. Логарифмирование

В некотором роде логарифмирование подобно умножению (делению) левой и правой части уравнения на одно и то же число. При логарифмировании важно помнить, что:

1. Логарифмирование можно произвести только в случае, когда у нас всего **два слагаемых**.
2. Логарифмирование проводиться по основанию, которое мы выбираем из соображений удобства. Обычно в условии уже будет логарифм и именно по основанию этого логарифма мы и будем логарифмировать.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $x^{\lg x} = 1000x^2$.

Прологарифмируем уравнение по основанию 10, так как в условии задачи мы видим lg*x*. Получим

$$\lg\left(x^{\lg x}\right) = \lg\left(1000x^2\right)$$

А теперь для логарифма в левой части уравнения применим свойство $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$, а для логарифма в правой части свойство $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (обычно эти свойства почти всегда будут применяться при решении подобных примеров). Получим

$$\lg\left(x^{\lg x}\right) = \lg\left(1000x^2\right) \quad \Rightarrow \quad \lg x \cdot \lg x = \lg 1000 + \lg x^2$$

Продолжаем упрощать

$$\lg x \cdot \lg x = \lg 10^3 + \lg x^2 \quad \Rightarrow \quad \lg^2 x = 3 + 2\cdot\lg x \quad \Rightarrow \quad \lg^2 x - 2\cdot\lg x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\lg x = t\} \quad \Rightarrow \quad t^2 - 2t - 3 = 0$$

Дальнейшее решение очевидно.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $x^{\log_3 x - 4} = \dfrac{1}{27}$.

Прологарифмируем уравнение по основанию 3. Получим

$$\log_3 x^{\log_3 x - 4} = \log_3 3^{-3} \quad \Rightarrow \quad (\log_3 x - 4)\cdot\log_3 x = -3 \quad \Rightarrow \quad \{\log_3 x = t\} \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

Дальнейшее решение очевидно.

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x}$.

Прологарифмируем уравнение по основанию 10. Получим

$$\lg x^{\frac{\lg x+5}{3}} = \lg 10^{5+\lg x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lg x+5}{3}\lg x = (5+\lg x)\cdot\lg 10 \quad \Rightarrow \quad (\lg x+5)\lg x = 3\cdot(5+\lg x)$$

$$(\lg x+5)\lg x - 3\cdot(5+\lg x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lg x+5)(\lg x-3) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} 5+\lg x = 0 \\ \lg x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x = -5 \\ \lg x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10^{-5} \\ x_2 = 10^3 \end{cases}$$

ПРИМЕР. *Решите уравнение* $|x|^{\lg|x|} = 10^4$.

Прологарифмируем уравнение по основанию 10. Получим

$$\lg|x|^{\lg|x|} = \lg 10^4 \quad \Rightarrow \quad \lg|x|\lg|x| = 4 \quad \Rightarrow \quad \lg^2|x| = 4 \quad \Rightarrow \quad \lg|x| = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \lg|x| = 2 \\ \lg|x| = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = 100 \\ |x| = \dfrac{1}{100} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 100 \\ x = \pm\dfrac{1}{100} \end{cases}.$$

Тест 7.07.02. Решите уравнения

1. $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001$.
2. $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} = \dfrac{1}{x}$.
3. $\left(\sqrt{x}\right)^{\lg x} = \sqrt{100x}$.
4. $(x+7)^{\lg(x+7)} = 10$
5. $x^{\log_2 x + 2} = 256$.
6. $x^{\log_4 x} = 2^{3(\log_4 x + 3)}$
7. $9x^{\lg x} + 91x^{-\lg x} = 60$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7
0,01; 0,1; 10; 100	0,001; 1; 10	0,1; 100	3; –6,9	4; 1/16	1/8; 64	$10^{\pm\sqrt{\lg(13/3)}}$; $10^{\pm\sqrt{\lg(7/3)}}$

7.08. Системы уравнений

ПРИМЕР. *Решите систему* $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$.

Преобразовывая первое и второе уравнения получаем

$$\begin{cases} 2^{2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)} = 2^5 \\ \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что

$$2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) = 5$$

Отсюда $\frac{x}{y} = 2$ или $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ (как? Меняем $\frac{x}{y} = t$ и решаем простое квадратное уравнение). Следовательно, исходная система равносильна совокупности двух систем. Первая система

$$\begin{cases} x = 2y \\ \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 1 \end{cases}$$

Подставим *x* из первого уравнения во второе. Получим

$$\log_3(2y-y) + \log_3(2y+y) = 1 \;\Rightarrow\; \log_3 y + \log_3 3y = 1 \;\Rightarrow\; \log_3 y + \log_3 3 + \log_3 y = 1 \;\Rightarrow$$

$$2\log_3 y + 1 + \log_3 y = 1 \;\Rightarrow\; 2\log_3 y = 0 \;\Rightarrow\; y = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$$

Вторая система

$$\begin{cases} y = 2x \\ \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 1 \end{cases}$$

Подставим *y* из первого уравнения во второе. Получим

$$\log_3(x-2x) + \log_3(x+2x) = 1 \;\Rightarrow\; \log_3(-2) + \log_3(3x) = 1$$

Очевидно, что такое уравнение решений не имеет. **Ответ:** (2;1)

ПРИМЕР. *Решите систему* $\begin{cases} \log_3 2x - \log_3\left(\frac{2}{y}\right) = 1 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$.

В данном случае никаких новых методов решения. Выразим *y* из второго уравнения и подставим в первое. Получим

$$\log_3 2x - \log_3\left(\frac{2}{4x-1}\right) = 1 \;\Rightarrow\; \log_3 \frac{2x}{\frac{2}{4x-1}} = 1 \;\Rightarrow\; \log_3 x(4x-1) = 1 \;\Rightarrow\; 3^1 = x(4x-1) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Второй корень не подходит по ОДЗ. **Ответ:** (1;3)

ПРИМЕР. *Решите систему* $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = 0 \\ \log_4 x + \log_2 y = 1 \end{cases}$.

Преобразуем некоторые слагаемые системы

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_{2^2} y = 0 \\ \log_{2^2} x + \log_2 y = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 y = 0 \\ \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2\log_2 x - \log_2 y = 0 \\ \log_2 x + 2\log_2 y = 2 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на –2 и складываем уравнения. Получим

$$\begin{cases} 2\log_2 x - \log_2 y = 0 \\ -2\log_2 x - 4\log_2 y = -4 \end{cases} \Rightarrow \left(2\log_2 x - \log_2 y\right) + \left(-2\log_2 x - 4\log_2 y\right) = 0 + (-4) \Rightarrow$$

$$2\log_2 x - \log_2 y - 2\log_2 x - 4\log_2 y = -4 \Rightarrow 5\log_2 y = 4 \Rightarrow \log_2 y = \frac{4}{5} \Rightarrow y = 2^{\frac{4}{5}}$$

Подставив y в первое уравнение и найдем x

$$2\log_2 x - \log_2 2^{\frac{4}{5}} = 0 \Rightarrow 2\log_2 x - \frac{4}{5}\log_2 2 = 0 \Rightarrow 2\log_2 x - \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow \log_2 x = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 2^{\frac{2}{5}}$$

Тест 7.08.02. Решите системы уравнений

1. $\begin{cases} y^{1/x} = 10 \\ \lg y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \log_x(3x+2y) = 2 \\ \log_y(2x+3y) = 2 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \log_2 2x + \log_2(y/2) = -1 \\ x - y = -(7/4) \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 5 \\ \log_3 x - \log_3 y = 7 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x+y) = 1 - \log_3(x-y) \end{cases}$.

6. $\begin{cases} 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 6 = 0 \\ \lg(3x-y) + \lg(x+y) - 4\lg 2 = 0 \end{cases}$.

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
(1;10), (–1;0,1)	(5;5)	(0,25; 2)	$\left(3^6; \frac{1}{3}\right)$	(2;1)	(2;2)

Итоговый тест 2. Вычислите

1. $(0,2)^{\frac{1}{2}\log_5 4 - \log_{25} 16}$

2. $\log_{27} \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$

3. $\log_{0,01} 125 \cdot \log_{0,2} 10000$

4. $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$

5. $\log^2_{\sqrt[3]{5}} \sqrt{5} - \log_{\sqrt[3]{5}} 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{3}+1}(4+2\sqrt{3})$

Решите уравнения

6. $\log_{0,1}(3x-2) = -1$

7. $\log_{5-x}\left(2x^2 - 12x + 17\right) = 2$

8. $10^{5x} = 5$

9. $\log_{0,5}(5x^2 + 9x + 2) = \log_3 \frac{1}{9}$

10. $\log_5(3x-11) + \log_5(x-27) = 3 + \log_5 8$

11. $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 3\lg 2 + \lg(x-2)$

12. $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2$

13. $\log^2_{1/2} 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$

14. $\log_2^2(2x) = \log_2 x^4$

15. $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$

16. $\log_2(x+4) = \log_{4x+16} 8$

17. $\frac{1}{4}\log_5^2(2x+3)^2 + 8\log_5^2\sqrt{x} = \log_5(2x+3)^3 \cdot \log_5 x$

18. $\log_{0,25}\left(x^2 - 4x - 12\right) + \log_4\left(x^2 - x - 6\right) = 0,5$

19. $x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}$

20. $3^{\frac{1}{\log_4 9}} = x^{0,5\log_{\sqrt{x}}(x^2 - x)}$

Решите системы уравнений

21. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{15} \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$

23. $\begin{cases} \log_3(x+2y) + \log_{\frac{1}{3}}(x-2y) = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
2	$-\frac{2}{3}$	6	19	3,75	4	–2	$x = \frac{1}{5}\log_{10} 5$	0,2; –2	37	3; 5	2	$\frac{1}{128}$;2
14	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**			
2	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$;8	$-3\frac{7}{8}$;–2	3	9	3; 27	2	(3; 5)	(3; 3)	$\left(2; \frac{1}{2}\right)$			