Тема 11. Показательные неравенства

Содержание

11.01. Простые показательные неравенства

При решении показательных неравенств помните, что $y = a^x$ может быть как возрастающей функцией (если a>1), так и убывающей (a<1). Следовательно, знак неравенства будет сохраняться в первом случае (если a>1) и меняться на противоположный во втором (a<1).

Решение показательных неравенств подобно решению показательных уравнений. Поэтому при решении примеров на данную тему помните о следующих рекомендациях.

1. Превращайте десятичную дробь в обыкновенную.
2. Выравнивайте основания
3. Сравнивайте степени.

Так же не лишним будет вспомнить, что при решении неравенств:

1. Всегда переносите все слагаемые в левую часть (за исключением линейных неравенств).
2. Приводите дроби к общему знаменателю (вспоминайте тему уравнения).
3. Раскладывайте квадратичные трехчлены на множители (в числителе и в знаменателе получившейся дроби).
4. Все выражения в неравенстве представляйте в виде ($x \pm a$), а не ($a \pm x$).
5. Не забывайте менять знак неравенства при умножении/делении правой и левой части неравенства на отрицательно число.
6. **Всегда делайте пояснительный рисунок!!!**

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243$

Так как $0,00243 = \dfrac{243}{10000} = \dfrac{3^5}{10^5} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^5 = (0,3)^5$, то

$$(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243 \;\Rightarrow\; (0,3)^{2x^2-3x+6} < (0,3)^5.$$

Так как основание обоих степеней равны и меньше единицы (0,3<1), то мы обязаны **поменять** знак неравенства на противоположный. Получим

$$2x^2-3x+6 > 5 \;\Rightarrow\; 2x^2-3x+1 > 0$$

Теперь нам надо решить простое квадратное неравенство (тема 9.03).

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \dfrac{27}{64}$.

Так как $\dfrac{27}{64} = \dfrac{3^3}{4^3} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$ и $\dfrac{3}{4} < 1$ (знак неравенства будет меняться), то

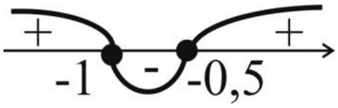
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64} \;\Rightarrow\; \left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \left(\frac{3}{4}\right)^3 \;\Rightarrow\; 6x+10-x^2 > 3 \;\Rightarrow\; x^2-6x-7<0.$$

И опять нам осталось решить простое квадратное неравенство. **Ответ:** (–1; 7).

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $\sqrt[x+1]{3} > 9$.

Учтем, что 3>1. Поэтому знак неравенства **не меняется**. Получим

$$3^{\frac{1}{x+1}}>3^{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{1+x}>2\ \Rightarrow\ \frac{1-2x-2}{x+1}>0\ \Rightarrow\ \frac{-2x-1}{x+1}>0\ \Rightarrow\ \frac{2x+1}{x+1}<0\ \Rightarrow\ \frac{2(x+0,5)}{x+1}<0$$



Ответ: $-1<x<-\frac{1}{2}$.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $4^{x}-2^{2(x-1)}+8^{\frac{2(x-2)}{3}}>52$

Очевидно, что $4=2^2$ и $8=2^3$. А дальше как при решении показательных уравнений

$$2^{2x}-2^{2(x-1)}+2^{\frac{3\cdot2\cdot(x-2)}{3}}>52\ \Rightarrow\ 2^{2x}-2^{2x-2}+2^{2x-4}>52\ \Rightarrow\ 2^{2x-4}\left(2^4-2^2+1\right)>13\cdot4\ \Rightarrow$$

$$2^{2x-4}\cdot13>13\cdot2^2\ \Rightarrow\ 2^{2x-4}>2^2\ \Rightarrow\ 2x-4>2\ \Rightarrow\ x>3$$

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$

Так как $\frac{1}{3}<1$, то мы **меняем** знак неравенства. Получим

$$\sqrt{x+4}<\sqrt{x^2+3x+4}.$$

Как избавиться от корня? Правильно, возвести во вторую степень правую и левую части неравенства. После возведения во вторую степень обеих частей неравенства получаем

$$\begin{cases}x+4<x^2+3x+4-\textit{само неравенство}\\ x+4\ge0-\textit{ОДЗ (под корнем только неотрицательное выражение)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+2x>0\\ x\ge-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(x+2)>0\\ x\ge-4\end{cases}$$

Для записи ответа надо обязательно сделать пояснительный рисунок, на котором будут две оси: одна для решения и одна для ОДЗ!!! Ответ: $[-4;-2)\cup(0;\infty)$

Тест 11.01.02. Решите неравенства **1.** $(0,3)^{\frac{x}{x-2}}<(0,3)^{\frac{6}{x-1}}$. **2.** $\left(0,4^{\frac{1}{x^2-2x-3}}\right)^{6-x}>1$ **3.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x}>\left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$. **4.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$.	**5.** $(0,36)^{0,5x^2-3}\ge\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$. **6.** Найти наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству: $\left(\frac{1}{7}\right)^{-x/3}>7$. **7.** Найти наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству: $4^{x/3}<16$. **8.** $8\cdot2^{x^2-3x}<(0,5)^{-1}$.	**9.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left\lvert\frac{x-1}{x+3}\right\rvert}<0,25$. **10.** $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{147}{20}\right)^{x}<\left(\frac{81}{625}\right)^{x}$. **11.** $-4\le3^{x^2-2x-1}-5\le4$. **12.** $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}\le315$. **13.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>5$. **14.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\le26$.

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**
$(-\infty;1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$	$(-1;3)\cup(6;+\infty)$	$(-8;4)$	$(1;4)$	$[-3;3]$	4	5	$(1;2)$

9.	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**
$(-7;-3)\cup\left(-3;-\frac{5}{3}\right)$	$x<0$	$\left[-1;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};3\right]$	$(-\infty;3]$	$(-\infty;0)$	$[-1;+\infty)$

11.02. Замена переменных при решении показательных неравенств

При решении неравенств всегда помните, что $a^x > 0$. Так же не лишним будет повторить методы решения простых квадратных неравенств (тема 9.03).

Начнем с самых простых примеров.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $5^x > -2$.

В этом случае x любое число, так как $5^x > 0$.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $5^x < -2$.

В этом случае нет решений, так как $5^x > 0$.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$.

В этом случае x любое число, так как при любых x: $a^x > 0$.

Перейдем к более сложным примерам.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $2^x + 2^{1-x} - 3 < 0$

Немного преобразуем неравенство

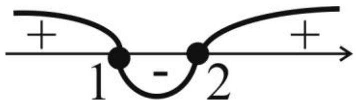
$$2^x + 2^1 \cdot 2^{-x} - 3 < 0 \;\Rightarrow\; 2^x + \frac{2}{2^x} - 3 < 0$$

Сразу же делаем замену и приводим к общему знаменателю. Пусть $2^x = t$. Следовательно

$$2^x + \frac{2}{2^x} - 3 < 0 \;\Rightarrow\; t + \frac{2}{t} - 3 < 0 \;\Rightarrow\; \frac{t^2 - 3t + 2}{t} < 0$$

Так как $t = 2^x > 0$, то мы имеем право умножить обе части неравенства на t (говоря другими словами, мы имеем право избавиться от знаменателя). При этом знак неравенства не изменится и мы получим равносильное неравенство

$$t^2 - 3t + 2 < 0 \;\Rightarrow\; t^2 - 3t + 2 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = 2;\; t_2 = 1 \;\Rightarrow\; (t-2)(t-1) < 0$$



Так как знак неравенства «меньше», то $1 < t < 2$. Возвращаемся к старой переменной

$$1 < 2^x < 2 \;\Rightarrow\; 2^0 < 2^x < 2.$$

Так как основание 2 больше 1, то мы **не меняем** знак неравенства и получим $0 < x < 1$.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$

И опять начинаем с преобразований

$$4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot \left(2^{-x}\right)^2 - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0.$$

Обратите внимание, что $2^{-2x} = \left(2^{-x}\right)^2$, так как $a^{xy} = \left(a^x\right)^y$. Пусть $2^{-x} = t$. Тогда

$$2t^2 - 7t - 4 < 0 \;\Rightarrow\; \left\{ 2t^2 - 7t - 4 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} t_1 = -\frac{1}{2} \\ t_2 = 4 \end{matrix} \right\} \;\Rightarrow\; 2\left(t + \frac{1}{2}\right)(t-4) < 0$$

Так как знак неравенства «меньше» и по ОДЗ $t > 0$, то $t < 4$ и исходное равенство будет иметь вид

$$2^{-x} < 4 \;\Rightarrow\; 2^{-x} < 2^2 \;\Rightarrow\; -x < 2 \;\Rightarrow\; x > -2$$

Если при решении показательных неравенств вы получаете отрицательное значение замены (в примере выше это $t_1 = -0{,}5$), то мы сразу же откидываем это значение, так как $a^x > 0$.

ПРИМЕР. *Решите неравенство* $4^x - 2\cdot 5^{2x} + 10^x > 0$

Преобразовываем

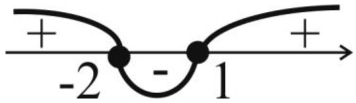
$$2^{2x} - 2\cdot 5^{2x} + 2^x\cdot 5^x > 0 \;\Rightarrow\; 2^{2x} + 2^x\cdot 5^x - 2\cdot 5^{2x} > 0 \;\Rightarrow\; \left(2^x\right)^2 + 2^x\cdot 5^x - 2\cdot\left(5^x\right)^2 > 0.$$

Мы получили однородное неравенство (вспоминайте тему 1.07 где были описаны однородные уравнения). Поэтому разделим обе части неравенства на 5^{2x}. Получим

$$\frac{2^{2x}}{5^{2x}} + \frac{2^x\cdot 5^x}{5^{2x}} - \frac{2\cdot 5^{2x}}{5^{2x}} > 0 \;\Rightarrow\; \frac{2^{2x}}{5^{2x}} + \frac{2^x}{5^x} - 2 > 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{2^x}{5^x}\right)^2 + \frac{2^x}{5^x} - 2 > 0$$

Пусть $\frac{2^x}{5^x} = t$. Тогда

$$t^2 + t - 2 > 0 \;\Rightarrow\; \left\{ t^2 + t - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} t_1 = 1 \\ t_2 = -2 \end{matrix} \right\} \;\Rightarrow\; (t-1)(t+2) > 0$$



И опять мы получили отрицательное значение замены ($t_2 = -2$), на которое мы даже не смотрим. Так как знак неравенства «больше» и $t > 0$, то $t > 1$, то есть

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^0 \;\Rightarrow\; x < 0.$$

Тест 11.02.02. Решите неравенства 1. $25^x < 6\cdot 5^x - 5$ 2. $7^x - 8\cdot 7^{\frac{x}{2}} + 7 < 0$ 3. $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7\cdot 2^{-x} - 4 < 0$ 4. $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 2^{1-x} - 8 < 0$	5. $9^{x+1} - 2\cdot 3^x < 7$ 6. $0{,}1^{x+1}(0{,}1^x + 0{,}1^{-x-1} - 11) < 0$ 7. $3\cdot(\sqrt{2})^x - 7\cdot 2^{\frac{x}{4}} - 20 \ge 0$ 8. $4^x - 2\cdot 5^{2x} + 10^x > 0$ 9. $2\cdot 7^x - 3\cdot 2^x > \frac{43}{7}\cdot 14^{\frac{x}{2}}$	10. $9\cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 5\cdot 6^{-\frac{1}{x}} < 4\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$ 11. Найти наибольшее целое *x*, удовлетворяющее неравенству: $4\cdot 3^{x+4} + 19\cdot 3^{-(x+4)} < \frac{31}{3^{x+4}}$ 12. Найти наименьшее целое *x*, удовлетворяющее неравенству: $5^{\frac{x}{2}+1} - 6\cdot 3^{x-1} < \frac{2}{3}\cdot 5^{\frac{x}{2}+1} - 3^{x-1}$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
(0;1)	(0;2)	$(-2;+\infty)$	$(-2;+\infty)$	$(-\infty;0)$	(–1;0)	$[8;\infty+)$	$(-\infty;0)$	$(2;+\infty)$	$(-0{,}5;0)$	–4	1

Итоговый тест 2. Решите неравенства 1. $16^x > 0{,}125$ 2. $2^{x^2+3x} - 8\cdot 2^x > 0$ 3. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$ 4. $2^x - 2^{x-4} > 15$	5. $3^x - 2^{x+4} > 3^{x-1} - 55\cdot 2^{x-2}$ 6. $3^{x+2} + 7^x < 4\cdot 7^{x-1} + 34\cdot 3^{x-1}$ 7. $4\cdot 3^x - 9\cdot 2^x - 5\cdot 6^{\frac{x}{2}} < 0$ 8. $3^{2x+1} + 3^{x+2} + 6 > 0$ 9. $2^{2x} + 2 > 3\cdot 2^x$ 10. $\left(\frac{1}{4}\right)^x \le 2^{3-x} - 16$	11. $(0{,}2)^{2x} - 6\cdot(0{,}2)^x + 5 \le 0$ 12. $2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} \le 0$ 13. $5\cdot(0{,}04)^x - 126\cdot(0{,}2)^x + 25 \le 0$ 14. $5\cdot 4^x + 2\cdot 25^x \le 7\cdot 10^x$ 15. Найти сумму целых решений неравенства $2^{\sqrt{x-1}} - (0{,}5)^{\sqrt{x-1}-1} < 3{,}5$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
$\left(-\frac{3}{4};\infty\right)$	$(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$	$\left(\frac{5}{3};2\right)$	$(4;\infty)$	$(3;\infty)$	$(-\infty;2)$	$(-\infty;4)$	R	$(-\infty;0)\cup(1;\infty)$	–2
11.	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**					
[–1;0]	[–1;0]	[–2;1]	[0;1]	10					