Все главные формулы по математике

Формулы сокращенного умножения и разложения на множители

Формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Разложение квадратного трехчлена на множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

где: x_1 и x_2 – корни уравнения: $ax^2 + bx + c = 0$, у которого $D > 0$ (т.е. имеется два корня). Или:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

где: x_0 – единственный корень уравнения: $ax^2 + bx + c = 0$, у которого $D = 0$. Если корней у трехчлена нет, то на множители он не раскладывается.

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0) \qquad D = b^2 - 4ac$$

Если $D > 0$, то имеется два корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Если $D = 0$, то имеется один корень (его кратность: 2): $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

Если $D < 0$, то корней нет.

Теорема Виета (выполняется только если оба корня существуют, т.е. в случае когда $D > 0$):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Парабола

График параболы задается квадратичной функцией: $f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз, при этом координаты вершины параболы: $x_в = -\dfrac{b}{2a}$. $y_в = y_{\max[a<0]} = y_{\min[a>0]} = ax_в^2 + bx_в + c = c - \dfrac{b^2}{4a}$

Парабола всегда пересекает ось OY в точке: $(0; c)$.

Степени и корни

Свойства степеней:

$$a^{p+g} = a^p \cdot a^g \qquad \frac{a^p}{a^g} = a^{p-g} \qquad \left(a^p\right)^g = \left(a^g\right)^p = a^{p \cdot g} \qquad \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \qquad a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad 1^n = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$0^n = 0$; при $n > 0$, ноль можно возводить только в положительную степень.

Свойства корней:

Если $m \in \mathbb{Z}$ – целое, $n \in \mathbb{N}$ – натуральное, то для любого $a > 0$ справедливо: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Для любых натуральных m и n, а также любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$ справедливы равенства:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ (при } b \neq 0\text{)} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^m}$$

Для арифметических корней: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Последнее справедливо: если n – нечетное, то для любого a; если же n – четное, то только при $a \geq 0$. Для корня нечетной степени выполняется также следующее равенство: $\sqrt[2n+1]{-x} = -\sqrt[2n+1]{x}$

Для корня четной степени: $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

Логарифмы

Определение логарифма: если $\log_a x = b$, то $a^b = x$, при: $a > 0$, $x > 0$, $a \neq 1$. Или: $a^{\log_a x} = x$

Свойства логарифмов:

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0 \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$\log_a x^k = k \cdot \log_a |x|$; при $x \neq 0$, если k – четное число.

$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$; при $x > 0$, если k – любое другое число.

$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_{|a|} x$; при $a \neq 0$ и $a \neq \pm 1$, если k – четное число.

$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$; при $a > 0$ и $a \neq 1$, если k – любое другое число.

$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$; при $c > 0$, $c \neq 1$. $\qquad a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия: $a_n = a_1 + d(n-1)$ $\qquad a_n = a_{n-1} + d$ $\qquad 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$a_m + a_n = a_k + a_p$; при: $m + n = k + p$.

Геометрическая прогрессия:

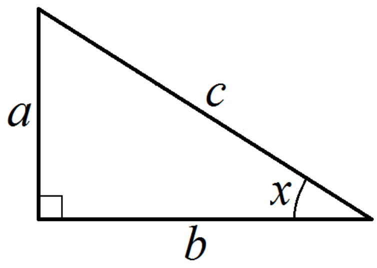
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \qquad b_n = b_{n-1} \cdot q \qquad b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \qquad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$S_{\text{беск.убыв.}} = \frac{b_1}{1-q}$; при: $|q| < 1$. $\qquad b_m \cdot b_n = b_k \cdot b_p$; при: $m + n = k + p$.

Тригонометрия

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Основные тригонометрические формулы. Пусть имеется прямоугольный треугольник, изображенный на рисунке, тогда:



$$\sin x = \frac{a}{c} \qquad \cos x = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Формулы двойного угла:

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \qquad \operatorname{ctg} 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$$

Формулы сложения:

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \qquad \sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \qquad \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \qquad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x} \qquad \operatorname{ctg}(x-y) = \frac{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}$$

Формулы преобразования суммы в произведение:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} \qquad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y+x)}{\sin x \cdot \sin y} \qquad \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$$

Формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right) \qquad \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

Формулы понижения степени:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \qquad \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

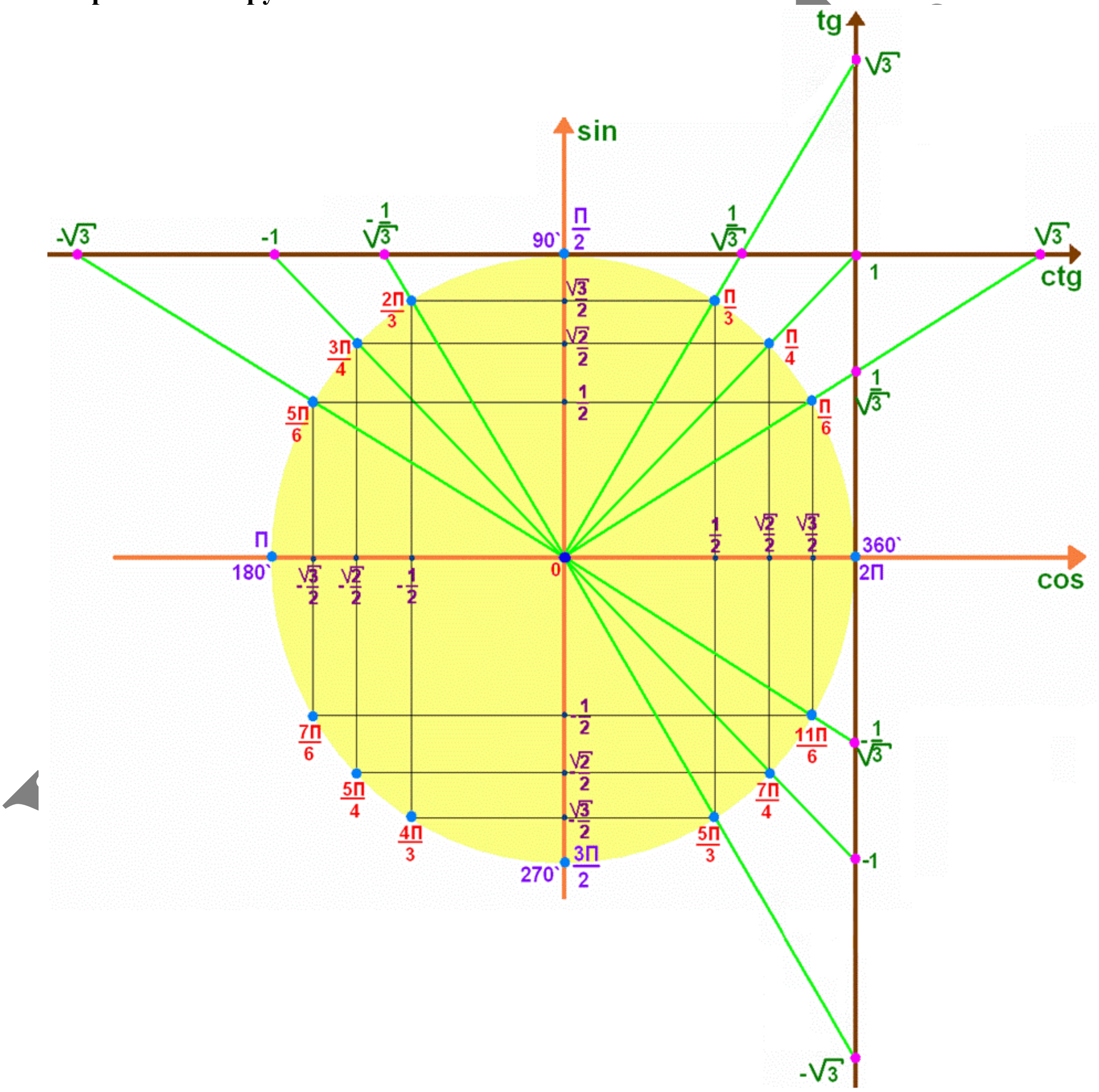
Формулы половинного угла:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$$

Формулы приведения:

Аргумент / Функция	$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$	$\beta=\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$	$\beta=2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Тригонометрическая окружность:



Тригонометрические уравнения

Формулы решений простейших тригонометрических уравнений. Решение уравнения вида sin $x = a$, может быть записано двумя равнозначными способами:

$$\sin x = a \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\sin x = a \quad \Rightarrow \quad x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z \end{array}\right.$$

Решение остальных уравнений записывается единственным образом:

$$\cos x = a \quad \Rightarrow \quad x = \pm\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in Z$$

Некоторые частные случаи:

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi n, \quad n \in Z \qquad \sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

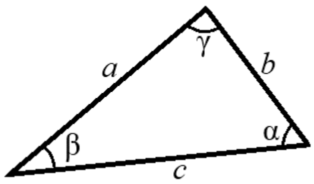
$$\sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z \qquad \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z \qquad \cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi n, \quad n \in Z \qquad \operatorname{ctg} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

Планиметрия

Произвольный треугольник (a, b, c – стороны треугольника, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности, h_a – высота опущенная на сторону a, h_b – высота опущенная на сторону b, h_c – высота опущенная на сторону c, l_a – биссектриса опущенная на сторону a, m_a – медиана опущенная на сторону a).



Сумма углов треугольника:

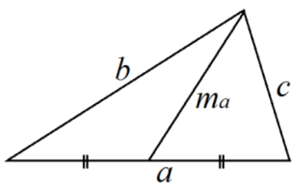
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° = \pi \text{ рад}$$

Площадь треугольника через две стороны и угол между ними: $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$

Площадь треугольника через основание и высоту опущенную на это основание: $S = \frac{1}{2} b \cdot h_b$

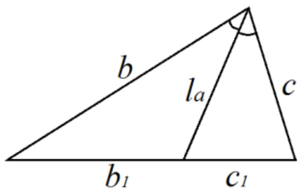
Площадь треугольника (**формула Герона**): $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где: $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр. Площадь треугольника через радиус описанной окружности: $S = \frac{abc}{4R}$

Формула медианы:



$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

Свойство биссектрисы:

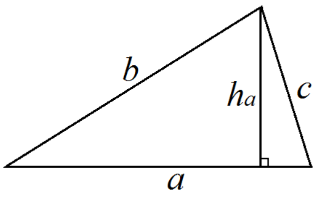


$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}$$

Формулы биссектрисы: $l_a = \sqrt{bc - b_1c_1}$ $\qquad l_a = \frac{\sqrt{cb(b+c+a)(b+c-a)}}{c+b}$

Основное свойство высот треугольника: $\frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}$

Формулы высоты:



$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Правильный треугольник (все стороны равны a). Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Радиус окружности, описанной около правильного треугольника: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Площадь правильного треугольника: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

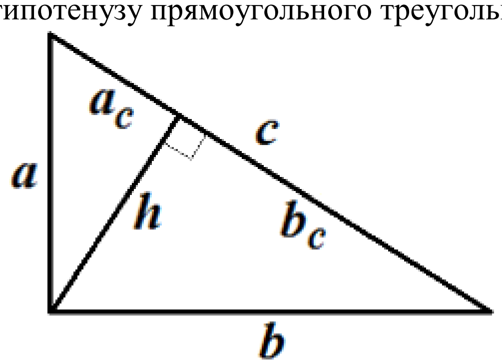
Прямоугольный треугольник (a, b – катеты, c – гипотенуза). Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r = \frac{a+b-c}{2}$

Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника: $R = \frac{c}{2}$

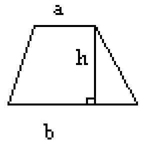
Площадь прямоугольного треугольника: $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}hc$

Свойства высоты, опущенной на гипотенузу прямоугольного треугольника:



$$h^2 = a_c \cdot b_c \qquad a^2 = a_c \cdot c \qquad b^2 = b_c \cdot c$$

Трапеция (a, b – основания, h – высота). Средняя линия трапеции: $l = \frac{a+b}{2}$



Площадь трапеции: $S = l \cdot h = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$

Параллелограмм. Площадь параллелограмма через сторону и высоту опущенную на неё: $S = bh$
Площадь параллелограмма через две смежные стороны и угол между ними: $S = ab \cdot \sin \gamma$
Квадрат. Площадь квадрата через сторону: $S = a^2$
Площадь квадрата через диагональ: $S = \dfrac{1}{2} d^2$
Площадь ромба через две диагонали d_1 и d_2, а также через угол между равными сторонами a:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 = a^2 \sin \gamma$$

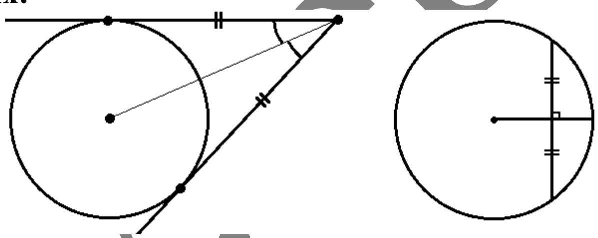
Площадь прямоугольника через две смежные стороны: $S = ab$
Площадь произвольного выпуклого четырехугольника через диагонали и угол между ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

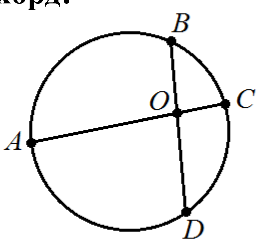
Площадь произвольной фигуры в которую можно вписать окружность (в т.ч. площадь любого треугольника) может быть рассчитана через радиус вписанной окружности и полупериметр по очень важной формуле: $\boldsymbol{S = p \cdot r}$
По этой же формуле часто удобно находить и радиус вписанной окружности в некоторый многоугольник, в который её удалось вписать (в т.ч. любой треугольник):

$$r = \frac{S}{p}$$

Свойства хорд и касательных:

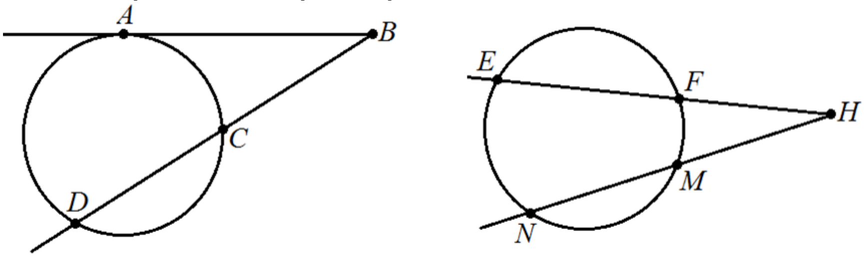


Теорема о пропорциональных отрезках хорд:



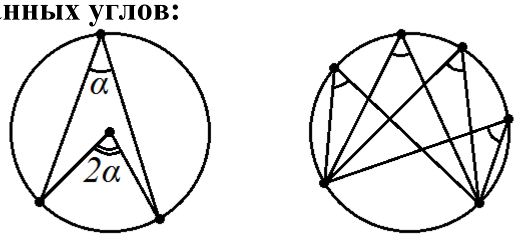
$BO \cdot OD = AO \cdot OC$

Теорема о касательной и секущей и о двух секущих:

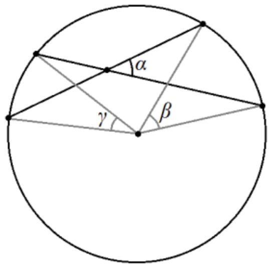


$BA^2 = BC \cdot BD$ $\qquad$ $HF \cdot HE = HM \cdot HN$

Свойства центральных и вписанных углов:

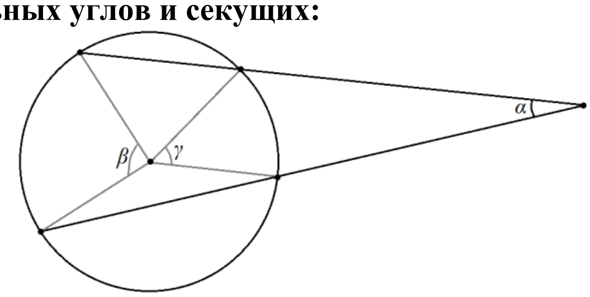


Свойство центральных углов и хорд:



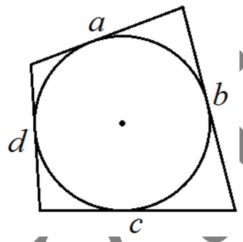
$$\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2}$$

Свойство центральных углов и секущих:



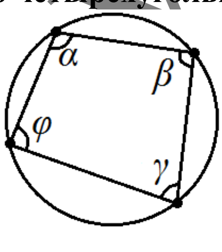
$$\alpha = \frac{\beta-\gamma}{2}$$

Окружность вписана в четырёхугольник (условие, когда это возможно):



$$a + c = b + d$$

Окружность описана около четырехугольника (условие, когда это возможно):



$$\alpha + \gamma = \beta + \varphi = 180°$$

Сумма углов *n*-угольника: $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 180° \cdot (n-2) = \pi \cdot (n-2)$ рад

Центральный угол правильного *n*-угольника: $\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{2\pi}{n}$ рад

Площадь правильного многоугольника (a_n – сторона правильного n-угольника, r – радиус вписанной окружности): $S = \frac{n \cdot a_n \cdot r}{2}$

Длина окружности (здесь и далее R – радиус окружности или круга): $L = 2\pi R$

Длина дуги окружности: $L_{дуги} = \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha_{град}}{180} = \alpha_{рад} R$

Площадь круга: $S = \pi R^2$

Площадь кругового сектора: $S_{сектора} = \frac{\pi \cdot R\mathrm{I} \cdot \alpha_{град}}{360} = \frac{\alpha_{рад} R\mathrm{I}}{2}$

Площадь кольца (R – радиус внешней окружности, r – радиус внутренней окружности): $S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$

Площадь кругового сегмента ($0 < \alpha < \pi$; α – угол в радианах): $S = \dfrac{R^2}{2}\left(\alpha - \sin\alpha\right)$

Стереометрия

Куб (a – сторона куба, d – главная диагональ). Главная диагональ куба: $d = a\sqrt{3}$

Объем куба: $V = a^3$

Прямоугольный параллелепипед (a, b, c – его измерения, d – главная диагональ). Объем: $V = abc$

Главная диагональ прямоугольного параллелепипеда: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Призма (h – высота призмы). Объем призмы: $V = S_{осн} \cdot h$

Прямая призма (P – периметр основания, l – боковое ребро, в данном случае равное высоте h):

$$S_{бок} = Pl = Ph$$

Цилиндр (R – радиус основания, h – высота цилиндра). Объем цилиндра: $V = \pi R^2 h$

Площадь боковой поверхности цилиндра: $S_{бок} = 2\pi Rh$

Объем пирамиды (h – высота пирамиды): $V = \dfrac{S_{осн} \cdot h}{3}$

Правильная пирамида (P – периметр основания, l – апофема, т.е. высота боковой грани). Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = \dfrac{1}{2}Pl$

Объем конуса (R – радиус основания, h – высота конуса): $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$

Площадь боковой поверхности конуса: $S_{бок} = \pi Rl$, где: l – длина образующей: $l = \sqrt{h^2 + R^2}$.

Объем шара (R – радиус шара): $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Площадь поверхности сферы (R – радиус сферы): $S = 4\pi R^2$

Координаты

Числовая ось. Пусть координата начала отрезка AB равна x_1, а координата конца x_2. Тогда длина отрезка находится по формуле: $|AB| = |x_2 - x_1|$

Координату середины отрезка находят по формуле: $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Координатная плоскость. Пусть координаты начала отрезка AB равны: $A(x_1; y_1)$, а координаты конца: $B(x_2; y_2)$. Тогда длина отрезка находится с помощью теоремы Пифагора по формуле:

$$|AB| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

Координаты середины отрезка находят по формулам: $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $\qquad$ $y_c = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Трехмерная система координат. Пусть координаты начала отрезка AB равны: $A(x_1; y_1; z_1)$, а координаты конца: $B(x_2; y_2; z_2)$. Длина отрезка находится по формуле: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Координаты середины отрезка находят по формулам: $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $\quad y_c = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ $\quad z_c = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$

Таблица квадратов двухзначных чисел

		Десятки									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Единицы	**0**	0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
	1	1	121	441	961	1681	2601	3721	5041	6561	8281
	2	4	144	484	1024	1764	2704	3844	5184	6724	8464
	3	9	169	529	1089	1849	2809	3969	5329	6889	8649
	4	16	196	576	1156	1936	2916	4096	5476	7056	8836
	5	25	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025
	6	36	256	676	1296	2116	3136	4356	5776	7396	9216
	7	49	289	729	1369	2209	3249	4489	5929	7569	9409
	8	64	324	784	1444	2304	3364	4624	6084	7744	9604
	9	81	361	841	1521	2401	3481	4761	6241	7921	9801